Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Dezember 2024

Logik in der Informatik

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 13. Januar 2025, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 10 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

(a) Sei σ eine beliebige Signatur. Zeigen Sie, dass es Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, für die gilt:

$$(\varphi \wedge \forall x \psi) \not\equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$$

(b) Katzen äußern sich bekanntlich mit Hilfe der Laute „M“, „I“ und „U“.
Die *Katzensprache* K ist eine Menge von Worten über dem Alphabet $A := \{M, I, U\}$, die durch die folgenden Regeln rekursiv definiert ist:

Basisregel: (B) $MI \in K$.

Rekursive Regeln: Für alle $v \in A^*$ und alle $w \in A^*$ gilt:

(R1) Ist $vI \in K$, so ist auch $vIU \in K$.

(R2) Ist $Mv \in K$, so ist auch $Mvv \in K$.

(R3) Ist $vIIIw \in K$, so ist auch $vUw \in K$.

(R4) Ist $vUUw \in K$, so ist auch $vw \in K$.

(i) Geben Sie für jedes der folgenden Worte aus A^* an, ob es zur Menge K gehört oder nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

(i) MIU

(ii) UMII

(iii) MUII

(iv) MU

(ii) Beweisen Sie mit einer Induktion über den Aufbau der Menge K, dass für jedes Wort $w \in K$ gilt: Die Anzahl $|w|_I$ der Vorkommen des Lauts I in w ist *nicht* durch 3 teilbar (d.h. es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|w|_I = 3k+1$ oder $|w|_I = 3k+2$).

(iii) Kann eine Katze „MUUU“ machen? D.h., ist $MUUU \in K$?

(iv) Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge A^* an, welcher die Sprache K definiert, d.h. insbesondere gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = K$.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Welche der folgenden beiden Aussagen ist für jede Signatur σ und jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ korrekt, welche nicht? Beweisen Sie, dass ihre Antworten korrekt sind.

(i) $\exists x \, \forall y \, \varphi \models \forall y \, \exists x \, \varphi$ **(ii)** $\forall y \, \exists x \, \varphi \models \exists x \, \forall y \, \varphi$

(b) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(x,z) \;:=\; \exists y \Big(E(z,y) \to \big(\forall y \, E(x,y) \;\wedge\; \neg \exists x \, E(x,y) \big) \Big)$$

(i) Berechnen Sie eine zu φ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in Negationsnormalform.

(ii) Berechnen Sie eine zu φ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in Pränex-Normalform.

Gehen Sie hierbei ähnlich wie in Beispiel 3.70 vor. Machen Sie pro Zwischenschritt nur eine Umformung und kommentieren Sie Ihre Zwischenschritte.

(c) Beweisen Sie Satz 3.67 aus der Vorlesung, das heißt zeigen Sie:

Jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer Formel in NNF.

(d) Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58). Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol und sei 2-*COL* die Klasse aller gerichteten, zweifärbbaren Graphen, d.h. aller $\{E\}$-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

Es gibt eine Funktion $f : A \to \{rot, blau\}$, sodass für jede Kante (a,b) in $E^{\mathcal{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

Zeigen Sie mittels **logischer Reduktion**, dass die Klasse 2-*COL* *nicht FO-definierbar* ist.

Aufgabe 4:

(verschoben auf Blatt 11)