Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. Januar 2025

Logik in der Informatik

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 10

Abgabe: *bis 13. Januar 2025, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 10 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

(a) Sei σ eine beliebige Signatur. Zeigen Sie, dass es Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gibt, für die gilt:

$$(\,\varphi \,\wedge\, \forall x\, \psi\,) \;\not\equiv\; \forall x\,(\,\varphi \,\wedge\, \psi\,)$$

(b) Katzen äußern sich bekanntlich mithilfe der Laute „M“, „I“ und „U“.
Die *Katzensprache* K ist eine Menge von Worten über dem Alphabet $A := \{\,\mathtt{M}, \mathtt{I}, \mathtt{U}\,\}$, die durch die folgenden Regeln rekursiv definiert ist:

Basisregel:

(B) $\mathtt{MI} \in K$.

Rekursive Regeln: Für alle $v, w \in A^*$ gilt:

(R1) ist $v\mathtt{I} \in K$, so ist auch $v\mathtt{IU} \in K$;

(R2) ist $\mathtt{M}v \in K$, so ist auch $\mathtt{M}vv \in K$;

(R3) ist $v\mathtt{III}w \in K$, ist auch $v\mathtt{U}w \in K$; und

(R4) ist $v\mathtt{UU}w \in K$, ist auch $vw \in K$.

(i) Beweisen Sie mittels Induktion über den Aufbau der Menge K, dass für jedes Wort $w \in K$ gilt:

Die Anzahl $|w|_{\mathtt{I}}$ der Vorkommen des Lauts $\mathtt{I}$ in w ist *nicht* durch 3 teilbar (d.h. es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass gilt: $|w|_{\mathtt{I}} = 3k+1$ oder $|w|_{\mathtt{I}} = 3k+2$).

(ii) Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge A^* an, welcher die Sprache K definiert, d.h. insbesondere gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = K$.

(iii) Geben Sie für jedes der folgenden Worte entweder eine Ableitung des Wortes in $\mathfrak{K}$ an oder beweisen Sie, dass es nicht in der Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$ liegt.

(i) $\mathtt{MIU}$ **(ii)** $\mathtt{MUII}$ **(iii)** $\mathtt{MUUU}$

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Welche der folgenden beiden Aussagen ist für jede Signatur σ und jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ korrekt, welche nicht? Beweisen Sie, dass ihre Antworten korrekt sind.

(i) $\exists x \, \forall y \, \varphi \models \forall y \, \exists x \, \varphi$ **(ii)** $\forall y \, \exists x \, \varphi \models \exists x \, \forall y \, \varphi$

(b) Sei $\sigma := \{ E \}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E. Betrachten Sie die $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel

$$\varphi(x,z) \;:=\; \forall y \Big(E(z,y) \;\rightarrow\; \big(\exists y \, E(x,y) \;\wedge\; \neg \forall x \, E(x,y) \big) \Big) .$$

(i) Berechnen Sie eine zu φ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in Negationsnormalform.

(ii) Berechnen Sie eine zu φ äquivalente $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel in Pränex-Normalform.

Gehen Sie hierbei ähnlich wie in Beispiel 3.70 vor. Machen Sie pro Zwischenschritt nur eine Umformung und kommentieren Sie Ihre Zwischenschritte.

(c) Beweisen Sie Satz 3.67 aus der Vorlesung, das heißt zeigen Sie:

Jede $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel φ ist äquivalent zu einer Formel in NNF.

(d) Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58).

Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol und sei $\mathsf{2\text{-}COL}$ die Klasse aller gerichteten, zweifärbbaren Graphen, d.h. aller $\{ E \}$-Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

es gibt eine Funktion $f\colon A \to \{ \mathit{rot}, \mathit{blau} \}$, s.d. $f(a) \neq f(b)$ für alle $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$.

Zeigen Sie mittels **logischer Reduktion**, dass die Klasse $\mathsf{2\text{-}COL}$ *nicht* FO-definierbar ist.

Aufgabe 4:

(verschoben auf Blatt 11)