Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

25. Oktober 2024

Logik in der Informatik

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 4. November 2024, 13.⁰⁰ Uhr*

Aufgabe 1: **(Moodle-Quiz)**

Absolvieren Sie das Quiz 2 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: **(Präsenzaufgabe)**

Für den Park der „Dinopark GmbH & Co. KG", welcher sich über ein 68 mal 68 Gehege großes, quadratisches Areal erstreckt, soll ein Nutzungsplan erstellt werden. Jedes Gehege wird durch ein Paar $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in [68]$ identifiziert, welches mit den Gehegen $\langle i{-}1, j\rangle$, $\langle i{+}1, j\rangle$, $\langle i, j{-}1\rangle$ und $\langle i, j{+}1\rangle$ benachbart ist. Gehege am Rand des Parks haben demnach natürlich weniger als vier Nachbarn. Jedes Gehege soll höchstens eine der Arten ***B****rachiosaurus*, ***R****aptor*, ***S****tegosaurus* oder ***T****yrannosaurus* beherbergen, da sie sich untereinander nicht vertragen.

Für die Planung werden die Aussagensymbole $B_{i,j}$, $R_{i,j}$, $S_{i,j}$ und $T_{i,j}$ mit $i, j \in [68]$ verwendet. Hierbei repräsentiert z. B. $R_{13,9}$ die Aussage: „Gehege $\langle 13, 9\rangle$ beherbergt Raptoren". Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass in jedem Gehege tatsächlich nur eine der oben genannten Arten gehalten wird.

(b) Welche Bedingung wird durch die folgende Formel φ_2 repräsentiert?

$$\varphi_2 \quad := \bigwedge_{i,j\in\{2,\dots,67\}} \Big((B_{i,j} \vee S_{i,j}) \to (\neg T_{i-1,j} \wedge \neg T_{i+1,j} \wedge \neg T_{i,j-1} \wedge \neg T_{i,j+1}) \Big)\,.$$

(c) Raptoren haben eine Tendenz dazu, aus ihren Gehegen auszubüxen. Damit sie dem Park nicht so schnell entkommen können, dürfen keine Raptoren in den Randgehegen leben.

Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die besagt, dass keines der Raptorengehege am Rand liegt.

(d) Da diese Saurier beim kleinen Publikum besonders beliebt sind, sollen lange Laufwege um alle vier Arten zu sehen vermieden werden. Daher soll es mindestens ein Gehege geben, sodass jede der vier Arten in einem der benachbarten Gehege gehalten wird.

Geben Sie eine Formel φ_4 an, die diese Bedingung repräsentiert.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(40 Punkte)**

(a) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist eine *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \; := \; \begin{cases} (A_n \leftrightarrow A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist,} \\ (A_n \leftrightarrow \neg A_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist.} \end{cases}$$

Sei $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (A_0 \leftrightarrow A_0)$, $\varphi_1 = (A_1 \leftrightarrow A_1)$, $\varphi_2 = (A_2 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_9)$, $\varphi_4 = (A_4 \leftrightarrow A_{16})$ und $\varphi_5 = (A_5 \leftrightarrow \neg A_{25})$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I} \colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ an, sodass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \;\equiv\; \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Beweisen Sie, dass für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \models (\varphi \to \psi)\,.$$

Aufgabe 4: **(20 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 2 des Buchs “Learn Prolog Now!”.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- **(i)** `burger` und `pizza`
- **(ii)** `mit(toast, Y)` und `mit(X, nutella)`
- **(iii)** `nett` und `'nett'`
- **(iv)** `Quellcode` und `'Quellcode'`
- **(v)** `toto` und `frosch(toto)`
- **(vi)** `plus(X, Y, 3)` und `plus(2, X, Y)`
- **(vii)** `or(not(X), Y)` und `or(not(p), and(X, X))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4(b) von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage `?- trinkt(isabell, X).` !