

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 8. Januar 2025

Aufgabe 1:

(10 + 15 = 25 Punkte)

Arbeiten Sie die Details der Konstruktion

- (a) der Formel φ_{Stop}^M und (b) der Formel $\varphi_{\text{Schritt}}^M$

aus Lemma 3.19 aus dem Skript aus.

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Beweisen Sie die Korrektheit der Aussage von Bemerkung 3.22, d.h. zeigen Sie:

- (a) Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Eine partielle Funktion f von \mathbb{N}^k nach \mathbb{N} ist genau dann TM-berechenbar, wenn sie Σ_1 -definierbar ist.
(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine Relation $R \subseteq \mathbb{N}^k$ ist genau dann TM-rekursiv aufzählbar, wenn sie Σ_1 -definierbar ist.

Aufgabe 3:

(7 + 8 + 7 + 8 = 30 Punkte)

Welche der folgenden Relationen bzw. partiellen Funktionen sind Σ_1 -definierbar, welche nicht? Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (a) $\text{exp}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{exp}(a, b) := a^b$ (f.a. $a, b \in \mathbb{N}$)
(b) $\text{Bit} := \{(i, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{das } i\text{-te Bit in der Binärdarstellung von } n \text{ ist } 1\}$
(c) $H := \{n_M : M \text{ ist eine Turing-Maschine, deren Zustandsmenge eine endliche Teilmenge von } \mathbb{N} \text{ ist, die bei leerer Eingabe nach endlich vielen Schritten anhält}\}$
(d) $\bar{H} := \mathbb{N} \setminus H$

Hinweis: Sie dürfen für die Lösung der Aufgabe die Church-Turing-These benutzen.

Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Zeigen Sie, dass es eine Σ_1 -Formel φ gibt, so dass es keine zu $\neg\varphi$ bezüglich des Standardmodells \mathcal{N} der Arithmetik äquivalente Σ_1 -Formel gibt.