

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis 20. November 2024

Aufgabe 1:

(10 + 5 = 15 Punkte)

Sei σ eine abzählbare Signatur.

- (a) Zeigen Sie, dass dann auch die Menge aller FO[σ]-Formeln abzählbar ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge aller FO[σ]-Formeln, die mit einem Existenzquantor beginnen, abzählbar ist.

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Beweisen Sie Behauptung 2 aus dem Beweis von Lemma 1.39'. Das heißt, zeigen Sie, dass das im Beweis konstruierte Ψ widerspruchsfrei bzgl. $\hat{\sigma}$ ist.

Aufgabe 3:

(20 + 20 = 40 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Wohlordnungssatz folgt.
- (b) Zeigen Sie, dass das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma folgt.

Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Arbeiten Sie das folgende Detail aus dem Beweis von Lemma 1.40' aus:

Sei K eine Kette in (M, \subseteq) , sei n eine natürliche Zahl ≥ 1 und seien $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ Elemente aus K . Beweisen Sie, dass es eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\Theta_{\pi(1)} \subseteq \Theta_{\pi(2)} \subseteq \dots \subseteq \Theta_{\pi(n)}$ ist.