

Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate

Wintersemester 2024/2025

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis 23. Oktober 2024

Aufgabe 1: (10 + 10 = 20 Punkte)

Es sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol. Betrachten Sie die Substitution \mathcal{S} mit

$$\mathcal{S}(v_1) := f(v_0, v_0), \quad \mathcal{S}(v_2) := f(v_0, v_1) \quad \text{und} \quad \mathcal{S}(v_3) := f(v_1, v_0).$$

Berechnen Sie $\varphi\mathcal{S}$ für die folgenden Formeln φ :

- (a) $v_3 = f(v_1, v_2)$
- (b) $\exists v_1 \forall v_2 v_3 = f(v_1, v_2)$.

Aufgabe 2: (20 + 30 = 50 Punkte)

Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{E\}$ und $\sigma_{\text{Ar}} = \{+, \cdot, \leq, 0, 1\}$

- (a) Geben Sie FO[σ_{Graph}]-Formeln an, die in einem endlichen gerichteten Graphen G folgende intuitive Bedeutung haben:
 - (i) G enthält (mind.) einen isolierten Knoten, also einen Knoten ohne Nachbarn.
 - (ii) G enthält einen Kreis der Länge drei.
- (b) Geben Sie FO[σ_{Ar}]-Formeln an, die im Standardmodell \mathcal{N} der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:
 - (i) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, sodass $p = 3m + 2$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$.
 - (ii) $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. es gibt keine Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.
 - (iii) Jede zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen Teiler $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq \sqrt{n}$.

Aufgabe 3: (30 Punkte)

Beweisen Sie das Isomorphielemma, das heißt, zeigen Sie, dass für alle FO[σ]-Sätze φ und alle isomorphe σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi$$