Lemma 1.40'

Sei $\hat{\sigma}$ eine Signatur und sei $\Psi \subseteq FO[\hat{\sigma}]$ eine bzgl $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine Formelmenge Θ mit $\Psi \subseteq \Theta \subseteq FO[\hat{\sigma}]$, die bzgl $\hat{\sigma}$ widerspruchsfrei und negationstreu ist.

Klar: Falls Ψ bzgl $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält, so auch Θ.

Bevor wir Lemma 1.40' beweisen, schließen wir zunächst den Beweis des Erfüllbarkeitslemmas und des Vollständigkeitssatzes für beliebige Signaturen ab:

Erfüllbarkeitslemma:

Sei σ eine beliebige Signatur. Jede bzgl σ widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ ist erfüllbar.

Beweis: Nutze Lemma 1.39', um eine Signatur $\hat{\sigma} \supseteq \sigma$ und eine bzgl $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie Formelmenge Ψ mit $\Theta \subseteq \Psi \subseteq FO[\hat{\sigma}]$ zu erhalten, die bzgl $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält.

Nutze dann Lemma 1.40', um eine bzgl $\hat{\sigma}$ widerspruchsfreie und negationstreue Formelmenge Θ mit $\Psi \subseteq \Theta \subseteq FO[\hat{\sigma}]$ zu erhalten, die — ebenso wie Ψ — bzgl $\hat{\sigma}$ Beispiele enthält.
Gemäß Satz von Henkin ist Θ erfüllbar, und die reduzierte Terminterpretation $\mathcal{J} := [\mathcal{I}_\Theta]$ ist ein Modell von Θ.
Wegen $\Phi \subseteq \Theta$ gilt: $\mathcal{J} \models \Phi$.
Gemäß Koinzidenzlemma gilt für das σ-Redukt $\mathcal{I}$ der $\hat{\sigma}$-Interpretation $\mathcal{J}$ ebenfalls, dass $\mathcal{I} \models \Phi$.

□

Wie zu Beginn des Kapitels bereits gesehen, folgt aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls und aus dem Erfüllbarkeitslemma der

Vollständigkeitssatz

Sei σ eine beliebige Signatur, sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$, $\varphi \in FO[\sigma]$

(a) $\Phi \vdash_{KS} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ ist bzgl σ widerspruchsfrei $\iff$ Φ ist erfüllbar.

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir nur noch Lemma 1.40' beweisen.

Zum Beweis von Lemma 1.40' nutzen wir das <u>Zornsche Lemma</u>. Als Hinführung zum Zornschen Lemma hier ein kleiner Exkurs.

Exkurs: Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz und Zornsches Lemma

(mehr Details dazu finden sich in dem Buch "Einführung in die Mengenlehre" von H.-D. Ebbinghaus, Spektrum-Akademischer Verlag, 4. Auflage, 2003)

Das Auswahlaxiom (kurz: AC, für "axiom of choice") wurde 1904 von Zermelo eingeführt. Anfangs heftig umstritten, wird es heute i.d.R. in der Mathematik als grundsätzliches Axiom akzeptiert und in Beweisen verwendet. Es besagt Folgendes:

<u>Auswahlaxiom</u> (kurz: AC)
Zu jeder Menge $\mathcal{Y}$ von nicht-leeren, zueinander disjunkten Mengen, gibt es eine Menge $\mathcal{Y}'$, die von jedem Element von $\mathcal{Y}$ genau ein Element enthält. Eine solche Menge $\mathcal{Y}'$ wird auch <u>Auswahlmenge zu $\mathcal{Y}$</u> genannt.

Man sieht leicht, dass das Auswahlaxiom äquivalent ist zur folgenden Aussage

(*): **Auswahlfunktionen auf Potenzmengen**

Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer jeden nicht-leeren Menge M gibt es eine Auswahlfunktion, dh eine Funktion $f : \mathcal{P}(M) \to M$, die folgende Eigenschaft hat:

$$\text{f.a. } X \subseteq M \text{ mit } X \neq \emptyset \text{ ist } f(X) \in X.$$

(dh: f ordnet jeder nicht-leeren Menge $X \subseteq M$ einen "Repräsentanten" $x \in X$ zu (via $x := f(X)$)).

Beweis der Äquivalenz von AC und (*):

AC $\Rightarrow$ (*): Sei M eine beliebige Menge. Falls $M = \emptyset$, so ist nichts zu beweisen. Falls $M \neq \emptyset$, so betrachte die Menge

$$Y := \{ \{ (X,x) : x \in X \} : X \subseteq M \text{ mit } X \neq \emptyset \}.$$

Klar: Y ist eine Menge, deren Elemente nicht-leere und zueinander disjunkte Mengen sind.
Gemäß Auswahlaxiom gibt es eine Menge Y', die von jedem Element von Y genau ein Element enthält. Dh für jedes $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ gibt es

genau ein $x_0 \in X$, so dass $(X, x_0) \in Y'$.
Die Funktion f, die jedem $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ dasjenige $x_0 \in X$ zuordnet, für das $(X, x_0) \in Y'$ ist, bezeugt, dass $\circledast$ erfüllt ist.

<u>$\circledast \Rightarrow$ AC</u>: Sei nun Y eine beliebige Menge von nicht-leeren, zueinander disjunkten Mengen.
Sei $M := \bigcup_{X \in Y} X$. Somit ist $Y \subseteq \mathcal{P}(M)$, und $M \neq \emptyset$.
Gemäß $\circledast$ gibt es eine Auswahlfunktion $f : \mathcal{P}(M) \to M$, dh eine Funktion f, s.d. f.a. $X \subseteq M$ mit $X \neq \emptyset$ gilt:

$$f(X) \in X.$$

Dann enthält $Y' := \{ f(X) : X \in Y \}$ von jedem Element von Y genau ein Element (dh: Y' ist eine Auswahlmenge zu Y).

$\square$

Mit etwas mehr Aufwand kann man zeigen, dass das Auswahlaxiom auch äquivalent ist zum so genannten Wohlordnungssatz (hier ohne Beweis)

Wohlordnungssatz (kurz: WOS)

Jede nicht-leere Menge M lässt sich <u>wohlordnen</u>, d.h. es gibt eine 2-stellige Relation $\prec \subseteq M \times M$, so dass $(M, \prec)$ eine <u>Wohlordnung</u> ist.

Der Begriff einer Wohlordnung ist dabei wie folgt definiert: <u>Notation</u>: Für $\prec \subseteq M \times M$ schreibe statt $(a,b) \in \prec$ auch $a \prec b$.

<u>Definition</u> (Wohlordnung)

Sei M eine Menge und sei $\prec \subseteq M \times M$.

Die Struktur $(M, \prec)$ heißt <u>Wohlordnung</u>, falls gilt:

<u>(1)</u> $(M, \prec)$ ist eine <u>strikte lineare Ordnung</u>, dh. es gilt:

(i) $\prec$ ist irreflexiv, dh f.a. $a \in M$ ist $(a,a) \notin \prec$

(ii) $\prec$ ist transitiv, dh f.a. $a, b, c \in M$ mit $a \prec b$ und $b \prec c$ ist auch $a \prec c$.

und (iii) $\prec$ ist konnex, dh f.a. $a, b \in M$ ist $a \prec b$ oder $a = b$ oder $b \prec a$.

<u>Beachte</u>: Aus (i) und (ii) folgt, dass $\prec$ antisymmetrisch

ist, dh f.a. $a, b \in M$ mit $a < b$ ist $(b, a) \notin <$.

und

(2) $(M, <)$ ist fundiert, dh: Jede nicht-leere Menge $X \subseteq M$ enthält ein bzgl $<$ in X kleinstes Element, dh ein $x_0 \in X$, s.d. es kein $x' \in X$ gibt mit $x' < x_0$.

[Beachte: Wegen (1) gilt also f.a. $x' \in X$ mit $x' \neq x_0$, dass $x_0 < x'$.]

Beispiele:

Die natürliche strikte lineare Ordnung $<^{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$ ist eine Wohlordnung.

Die natürlichen strikten linearen Ordnungen $<^{\mathbb{Z}}$, $<^{\mathbb{Q}}$, $<^{\mathbb{R}}$ auf $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind keine Wohlordnungen.

Gemäß dem Wohlordnungssatz lässt sich aber jede der Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wohlordnen.

Ähnlich wie bei der Äquivalenz von Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz kann man auch zeigen, dass das Auswahlaxiom äquivalent zum im Folgenden beschriebenen Zornschen Lemma ist. (hier ohne Beweis).

Das Zornsche Lemma geht zurück auf Felix Hausdorff (1909). Max Zorn (1935) hat den grundlegenden Nutzen dieses Lemmas in der Algebra nachgewiesen.

Um das Zornsche Lemma zu formulieren, benötigen wir etwas Notation.

<u>Definition</u> (Halbordnungen)

Sei M eine Menge und sei $\leq \subseteq M \times M$.

<u>(a)</u> Die Struktur $(M, \leq)$ heißt <u>Halbordnung</u>, falls gilt:

(i) $\leq$ ist reflexiv, dh f.a. $a \in M$ ist $a \leq a$.

(ii) $\leq$ ist antisymmetrisch, dh f.a. $a, b \in M$ mit $a \leq b$ und $b \leq a$ ist $b = a$.

und

(iii) $\leq$ ist transitiv, dh f.a. $a, b, c \in M$ mit $a \leq b$ und $b \leq c$ ist auch $a \leq c$.

(b) Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung.

- Eine <u>Kette in $(M, \leq)$</u> ist eine Menge $K \subseteq M$, s.d. f.a. $a, b \in K$ gilt: $a \leq b$ oder $b \leq a$
  (dh: alle Elemente in K sind bzgl $\leq$ vergleichbar).

- Ein Element $a \in M$ ist <u>eine obere Schranke einer Kette K in $(M, \leq)$</u>, wenn für jedes $b \in K$ gilt: $b \leq a$.

(c) Sei $(M, \leq)$ eine Halbordnung.
<u>Ein maximales Element in $(M, \leq)$</u> ist ein Element $a \in M$, so dass es kein $b \in M$ mit $a \leq b$ und $a \neq b$ gibt.

Unter Verwendung dieser Notationen können wir nun das Zornsche Lemma formulieren:

<u>Zornsches Lemma</u>
Für jede Halbordnung $(M, \leq)$ gilt:
Falls jede Kette K in $(M, \leq)$ eine obere Schranke in M hat, so besitzt $(M, \leq)$ ein maximales Element.

Ende des Exkurses!

Wir nutzen nun das Zornsche Lemma, um Lemma 1.40' zu beweisen.

<u>Beweis von Lemma 1.40'</u>

Sei $\hat{\sigma}$ eine Signatur und sei $\Psi \subseteq FO[\hat{\sigma}]$ wid. frei bzgl. $\hat{\sigma}$. <u>Ziel</u>: Zeige, dass es eine Formelmenge Θ gibt, für die gilt:

1) $\Psi \subseteq \Theta \subseteq FO[\hat{\sigma}]$,
2) Θ ist wid. frei bzgl $\hat{\sigma}$ und
3) Θ ist negationstreu.

Betrachte die Menge

$$M := \{ \Theta : \Psi \subseteq \Theta \subseteq FO[\hat{\sigma}] \text{ und } \Theta \text{ ist wid. frei bzgl } \hat{\sigma} \}.$$

<u>Klar:</u>
- $M \neq \emptyset$, da $\Psi \in M$.
- Für die Teilmengenrelation "$\subseteq$" auf M (mit $\Theta \subseteq \Theta'$ $:\Longleftrightarrow$ f.a. $\varphi \in \Theta$ ist $\varphi \in \Theta'$) ist $(M, \subseteq)$ eine Halbordnung

<u>Behauptung (∇)</u>: $(M, \subseteq)$ besitzt ein maximales Element, dh es gibt ein $\Theta \in M$, s.d. es kein $\Theta' \in M$ mit $\Theta \subsetneq \Theta'$ gibt

<u>Beweis von Beh(∇)</u>:

Gemäß dem Zornschen Lemma genügt es zu zeigen, dass jede Kette in $(M, \subseteq)$ eine obere Schranke in M hat.

Sei also $K \subseteq M$ eine beliebige Kette in $(M, \subseteq)$ (d.h.: f.a. $\Theta, \Theta' \in K$ gilt: $\Theta \subseteq \Theta'$ oder $\Theta' \subseteq \Theta$).
Falls $K = \emptyset$ ist, so besitzt K offensichtlicherweise eine obere Schranke in M (nämlich Ψ). Falls $K \neq \emptyset$, so betrachte

$\Theta_K := \bigcup_{\Theta \in K} \Theta$.

<u>Klar:</u> für jedes $\Theta \in K$ gilt: $\Theta \subseteq \Theta_K$.

Um nachzuweisen, dass K eine obere Schranke in M hat, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass $\Theta_K \in M$ ist.

Wegen $K \neq \emptyset$ ist $\Psi \subseteq \Theta_K \subseteq FO[\hat{\sigma}]$.

Außerdem ist Θ_K wid.frei bzgl $\hat{\sigma}$, denn:
Sei Γ eine beliebige <u>endliche</u> Teilmenge von Θ_K.
Sei $n := |\Gamma|$ und seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$. Dann gibt es $\Theta_1, \dots, \Theta_n \in K$, s.d. $\varphi_i \in \Theta_i$ f.a. $i \in \{1..n\}$.
Da K eine Kette in $(M, \subseteq)$ ist, gibt es eine Permutation $\pi : \{1, .., n\} \to \{1, .., n\}$, so dass

$\Theta_{\pi(1)} \subseteq \Theta_{\pi(2)} \subseteq \dots \subseteq \Theta_{\pi(n)}$.

Also ist $\Gamma \subseteq \Theta_{\pi(n)}$. Wegen $\Theta_{\pi(n)} \in M$ ist $\Theta_{\pi(n)}$ wid.frei bzgl $\hat{\sigma}$. Also ist auch Γ wid.frei bzgl $\hat{\sigma}$. Somit ist jede endliche Teilmenge von Θ_K wid.frei bzgl $\hat{\sigma}$. Also ist auch Θ_K wid.frei bzgl $\hat{\sigma}$.

Gemäß Definition von M ist also $\Theta_K \in M$. D.h: Θ_K ist eine obere Schranke von K in M.

$\square$ Beh $\heartsuit$.

Wir nutzen nun Beh $\bigtriangledown$, um den Beweis von Lemma 1.40' abzuschließen:

Gemäß Beh $\bigtriangledown$ besitzt $(M, \subseteq)$ ein maximales Element. D.h. es gibt ein $\Theta \in M$, so dass es kein $\Theta' \in M$ mit $\Theta \subsetneq \Theta'$ gibt.

Wegen $\Theta \in M$ gilt: $\Psi \subseteq \Theta \subseteq FO[\hat{\sigma}]$ und Θ ist wid. frei bzgl $\hat{\sigma}$.

Wir <u>müssen noch zeigen</u>, dass <u>Θ negationstreu</u> ist. Sei dazu $\varphi \in FO[\hat{\sigma}]$ eine beliebige Formel.
<u>Ziel</u>: Zeige, dass $\Theta \vdash_{K\hat{\sigma}} \varphi$ oder $\Theta \vdash_{K\hat{\sigma}} \neg\varphi$.

Falls $\Theta \vdash_{K\hat{\sigma}} \neg\varphi$ gilt, so sind wir fertig.
Falls $\Theta \nvdash_{K\hat{\sigma}} \neg\varphi$, so ist gemäß Lemma 1.25 (b) die Formelmenge $\Theta \cup \{\varphi\}$ widerspruchsfrei bzgl $\hat{\sigma}$.

Somit ist $\Theta \cup \{\varphi\} \in M$.
Da Θ ein maximales Element von M ist, kann es <u>nicht</u> sein, dass $\Theta \subsetneq \Theta \cup \{\varphi\}$ ist.
Somit muss $\varphi \in \Theta$ sein, und daher gilt insbes: $\Theta \vdash_{K\hat{\sigma}} \varphi$. Also ist Θ negationstreu.
Dies beendet den Beweis von Lemma 1.40'.

$\square_{\text{Lemma 1.40'}}$