Bisher erreicht:

Beweis des Erfüllbarkeitslemmas für den Spezialfall, dass die Signatur höchstens abzählbar groß ist.

Ziel jetzt

Beweis des Erfüllbarkeitslemmas für beliebige Signaturen.

Wir nutzen folgende Notationen:

Notationen:

- Für eine Signatur $\sigma$ schreiben wir $\mathfrak{S}_\sigma$, um den bzgl $\sigma$ definierten Sequenzenkalkül $\mathfrak{S}$ zu bezeichnen.
- Sind $\sigma$ und $\hat{\sigma}$ Signaturen mit $\sigma \subseteq \hat{\sigma}$ und ist $\Phi \subseteq FO[\sigma]$, so heißt $\Phi$ widerspruchsvoll bzgl $\hat{\sigma}$, falls es eine $FO[\hat{\sigma}]$-Formel $\varphi$ gibt, so dass

  $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_{\hat{\sigma}}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{S}_{\hat{\sigma}}} \neg\varphi$.

  $\Phi$ heißt widerspruchsfrei bzgl $\hat{\sigma}$, falls $\Phi$ nicht widerspruchsvoll bzgl $\hat{\sigma}$ ist.

Um das Erfüllbarkeitslemma für beliebige Signaturen zu beweisen, nutzen wir die folgenden Varianten von Lemma 1.39 und Lemma 1.40:

**Lemma 1.39':**

Sei $\sigma$ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ eine Formelmenge, die bzgl. $\sigma$ widerspruchsfrei ist.

Dann gibt eine Signatur $\hat{\sigma} \supseteq \sigma$ und eine Formelmenge $\Psi \subseteq FO[\hat{\sigma}]$, für die gilt

1) $\Phi \subseteq \Psi$

2) $\Psi$ ist widerspruchsfrei bzgl. $\hat{\sigma}$

3) $\Psi$ enthält Beispiele bzgl. $\hat{\sigma}$, d.h. für jede $FO[\hat{\sigma}]$-Formel der Form $\exists x\, \varphi$ (mit $x \in VAR$ und $\varphi \in FO[\hat{\sigma}]$) gibt es einen Term $t \in T_{\hat{\sigma}}$, so dass
$$\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_{\hat{\sigma}}} \left( \exists x\, \varphi \to \varphi\tfrac{t}{x} \right)$$

Beweis: Als Hilfsmittel zur Konstruktion von $\hat{\sigma}$ und $\Psi$ werden wir folgende Konstruktion iteriert nutzen:

Sei $\tau$ eine beliebige Signatur.
Für jede $FO[\tau]$-Formel $\varphi$ sei $c_\varphi$ ein neues Konstantensymbol, das nicht in $\tau$ vorkommt (so, dass für $\varphi, \psi \in FO[\tau]$ mit $\varphi \neq \psi$ auch $c_\varphi \neq c_\psi$ ist). Wir setzen

$$\tilde{\tau} := \tau \cup \{ c_{\exists x \varphi} : \exists x \varphi \in FO[\tau] \}$$
$$B(\tau) := \{ (\exists x \varphi \rightarrow \varphi \tfrac{c_{\exists x \varphi}}{x}) : \exists x \varphi \in FO[\tau] \}$$

<u>Behauptung 1</u>:
Für jede Signatur $\tau$ und jede bzgl $\tau$ widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq FO[\tau]$ gilt:
Die Formelmenge $\tilde{\Phi} := \Phi \cup B(\tau)$ ist widerspruchsfrei bzgl $\tilde{\tau}$.

<u>Beweis von Beh 1</u>: Durch Widerspruch!

Angenommen, $\tilde{\Phi}$ ist widerspruchs<u>voll</u> bzgl $\tilde{\tau}$.
Dann gibt es eine <u>endliche</u> Teilmenge $\tilde{\Gamma}$ von $\tilde{\Phi}$, die widerspruchs<u>voll</u> bzgl $\tilde{\tau}$ ist. Wir erhalten einen Widerspruch, indem wir zeigen, dass $\tilde{\Gamma}$ erfüllbar ist bzgl $\tilde{\tau}$ (denn wir wissen: jede erfüllbare Formelmenge ist widerspruchsfrei).
Um den Beweis von Beh 1 abzuschließen, genügt es, eine $\tilde{\tau}$-Interpretation $\tilde{\mathcal{I}}$ zu finden mit $\tilde{\mathcal{I}} \models \tilde{\Gamma}$.

Sei $\Gamma := \tilde{\Gamma} \cap \Phi$ und $\Delta := \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$.
Klar: $\Gamma \subseteq_e \Phi$ und $\Delta \subseteq_e B(\tau)$.

Sei $n = |\Delta|$ und sei

$$\left(\exists x_1 \varphi_1 \to \varphi_1 \frac{c_{\exists x_1 \varphi_1}}{x_1}\right), \ldots, \left(\exists x_n \varphi_n \to \varphi_n \frac{c_{\exists x_n \varphi_n}}{x_n}\right)$$

eine Auflistung aller Formeln aus $\Delta$.

Sei $\tau'$ die Menge aller Elemente aus $\tau$, die in mindestens einer Formel aus $\Gamma \cup \{\exists x_i \varphi_i : i \in \{1..n\}\}$ vorkommen.
Klar: $\tau'$ ist endlich (also auch abzählbar).
Da $\Phi$ widerspruchsfrei bzgl $\tau$ ist, ist auch $\Gamma$ widerspruchsfrei bzgl $\tau$, und daher erst recht widerspruchsfrei bzgl $\tau'$ (da $\tau' \subseteq \tau$).

Somit gilt: $\tau'$ ist eine abzählbare Signatur und $\Gamma \subseteq FO[\tau']$ ist widerspruchsfrei bzgl $\tau'$.
Gemäß Lemma 1.41 (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen) ist $\Gamma$ erfüllbar (bzgl $\tau'$).
D.h.: Es gibt eine $\tau'$-Interpretation $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}', \beta')$ mit $\mathcal{I}' \models \Gamma$.
Wir müssen $\mathcal{I}'$ noch zu einer $\tilde{\tau}$-Interpretation $\tilde{\mathcal{I}}$ erweitern, die auch alle Formeln aus $\Delta$ erfüllt.

Dazu legen wir für jedes Relations-, Funktions- oder Konstantensymbol in $\tau \setminus \tau'$ eine beliebige Interpretation über dem Universum von $\mathcal{A}'$ fest und schreiben $\mathcal{I}$, um die dadurch erhaltene $\tau$-Expansion von $\mathcal{I}'$ zu bezeichnen.

Wegen $I' \models \Gamma$ liefert das Koinzidenzlemma, dass auch $I \models \Gamma$ gilt. Sei $I = (\mathcal{A}, \beta)$

Um nun noch geeignete Interpretationen für die Konstantensymbole in $\tilde{\tau} \setminus \tau$ festzulegen, gehen wir wie folgt vor.

Halte ein beliebiges Element $a \in A$ fest.

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ tue Folgendes:

Falls $I \models \exists x_i \varphi_i$, so gibt es ein $b_i \in A$ mit $I\frac{b_i}{x_i} \models \varphi_i$

Falls $I \not\models \exists x_i \varphi_i$, so setze $b_i := a$.

Sei $\tilde{I}$ die $\tilde{\tau}$-Expansion von $I$ mit

$$c_{\exists x_i \varphi_i}^{\tilde{I}} := b_i \qquad \text{f.a. } i \in \{1, \dots, n\}$$

und $c^{\tilde{I}} := a$ f.a. $c \in \tilde{\tau} \setminus (\tau \cup \{c_{\exists x_i \varphi_i} : i \in \{1, \dots, n\}\})$.

Gemäß Koinzidenzlemma gilt $\tilde{I} \models \Gamma$ (da $I \models \Gamma$). Außerdem haben wir die Konstantensymbole in $\tilde{I}$ so interpretiert, dass für jedes $i \in \{1 \dots n\}$ gilt:

Falls $\tilde{I} \models \exists x_i \varphi_i$, so $\tilde{I} \models \varphi_i \frac{c_{\exists x_i \varphi_i}}{x_i}$

(gemäß Substitutionslemma!).

Also gilt f.a. $i \in \{1, \dots, n\}$: $\tilde{I} \models \left( \exists x_i \varphi_i \to \varphi_i \frac{c_{\exists x_i \varphi_i}}{x_i} \right)$.

Somit: $\tilde{I} \models \Delta$. Also: $\tilde{I} \models \Gamma \cup \Delta = \tilde{\Gamma}$,

d.h.: $\tilde{\Gamma}$ ist erfüllbar (bzgl $\tilde{\tau}$) und daher widerspruchsfrei bzgl $\tilde{\tau}$.

$\square$ Beh. 1

Um Lemma 1.39' zu beweisen, wenden wir nun Beh 1 iteriert an.

Setze
$$\sigma_0 := \sigma \quad \text{und} \quad \sigma_{n+1} := \tilde{\sigma}_n \quad \text{f.a. } n \in \mathbb{N}$$
$$\Phi_0 := \Phi \quad \text{und} \quad \Phi_{n+1} := \Phi_n \cup B(\sigma_n)$$

Gemäß Konstruktion gilt:

- $\sigma = \sigma_0 \subseteq \sigma_1 \subseteq \sigma_2 \subseteq \dots$
- $\Phi_n \subseteq \mathrm{FO}[\sigma_n]$ f.a. $n \in \mathbb{N}$
- $\Phi = \Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \dots$

Gemäß Voraussetzung von Lemma 1.39' ist $\Phi_0$ widerspruchsfrei bzgl $\sigma_0$. Per Induktion nach $n$ folgt mit Beh 1, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\Phi_n$ widerspruchsfrei bzgl $\sigma_n$ ist.

Setze
$$\hat{\sigma} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n \quad \text{und} \quad \Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n .$$

Klar: $\hat{\sigma} \supseteq \sigma$, $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$, $\Phi \subseteq \Psi$.

$\boxed{\text{\underline{Beh 2}: } \Psi \text{ ist widerspruchsfrei bzgl } \hat{\sigma}}$

<u>Beweis</u>: Übung!

$\boxed{\text{Beh 3: } \Psi \text{ enthält Beispiele bzgl } \hat{\sigma}}$

Beweis: Betrachte eine beliebige $FO[\hat{\sigma}]$-Formel der Form $\exists x \varphi$.
Diese Formel enthält nur endlich viele Symbole
Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, s.d.
$\exists x \varphi \in FO[\sigma_n]$ ist.
Somit gehört die Formel

$$\left( \exists x \varphi \to \varphi \frac{c_{\exists x \varphi}}{x} \right) \text{ zu } B(\sigma_n) \subseteq \Phi_{n+1} \subseteq \Psi.$$

Insbes. ist $t := c_{\exists x \varphi}$ ein $\hat{\sigma}$-Term, so dass

$$\Psi \vdash_{S_{\hat{\sigma}}} \left( \exists x \varphi \to \varphi \frac{t}{x} \right).$$

$\square_{\text{Beh 3}}$

Insgesamt haben wir also eine Signatur $\hat{\sigma}$ und eine Formelmenge $\Psi$ gefunden, die die in Lemma 1.39' postulierten Eigenschaften haben.

$\square_{\text{Lemma 1.39'}}$