Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Logik in der Informatik

Ausgewählte Kapitel der Logik: Klassische Resultate

Skript-Fragmente zur Vorlesung

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Version vom 6. Mai 2022

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

0.1 Einführung ins Thema

Logik als "Fundament der Mathematik"

Hilberts Programm (ca. 1900–1928, initiiert von David Hilbert)

Ziel: formale Grundlegung der Mathematik

Mittel: mathematische Logik:

- mathematische Strukturen als logische Strukturen
- mathematische Aussagen als logische Formeln
- mathematische Beweise durch "syntaktisches Schließen" (Symbolmanipulation: Axiome, Schlussregeln)

Ansatz: Rückführung der Mathematik auf **Arithmetik und Mengenlehre**

Zwei Kernfragen:

(1) Kann jede mathematische Aussage durch mathematisches Schließen bewiesen oder widerlegt werden?

(2) Gibt es ein Verfahren, das zu jeder mathematischen Aussage entscheidet, ob sie wahr oder falsch ist?

Beachte: Es gilt (1) $\Longrightarrow$ (2)

Eine andere Formulierung des **Entscheidungsproblems** (2) ist das **Allgemeingültigkeitsproblem** — hier für die Logik erster Stufe:

Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe
Eingabe: Eine Formel φ der Logik erster Stufe
Frage: Gilt für alle zu φ passenden Interpretationen $\mathcal{I}$: $\mathcal{I}$ erfüllt φ?

Beispiel: Sei φ die Formel

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \Big(\ x \leqslant y\ \wedge\ z = y + \underline{1} + \underline{1}\ \wedge\ \forall u\, \forall v\ \Big(\big(u \cdot v = y\ \vee\ u \cdot v = z\big)\ \to\ \big(u = \underline{1}\ \vee\ v = \underline{1}\big)\Big)\Big).$$

Beachte: φ besagt "es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge".

Der Nachweis, dass die Formel φ in der Arithmetik der natürlichen Zahlen erfüllt ist, würde also ein berühmtes offenes Problem aus der Zahlentheorie lösen, nämlich die Frage, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Zwei wichtige Aspekte der logischen Fundierung:

(1) Präzisierung von Aussagen (*"Logik für Penible"*)

(2) Automatisierung des Beweisens (*"Logik für Faule"*)

Zwei "Spielverderber":

(1) **Kurt Gödel (1931)**

- $+$: jede gültige Aussage kann durch syntaktisches Schließen bewiesen werden (**Vollständigkeitssatz**)
- $-$: in der Arithmetik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind (**Unvollständigkeitssatz**)
- $\Rightarrow$ Hilberts (1) funktioniert nicht!

(2) **Alan Turing (1936)**

- $+$: Der Begriff "automatisch entscheiden" lässt sich einfach und sauber definieren (**Turingmaschine**)
- $-$: Für die Arithmetik gibt es kein automatisches Verfahren — sie ist unentscheidbar
- $\Rightarrow$ Hilberts (2) funktioniert nicht!

Logik und Mathematik: Geschichte

um 325 v. Chr.:	• Aristoteles: Syllogismen • Euklid: Versuch einer Axiomatisierung der Geometrie
um 1700:	Leibniz formuliert das Ziel einer universellen Sprache zur Formulierung aller mathematischen Aussagen und eines Kalküls zur Herleitung aller wahren Aussagen.
um 1850:	Axiomatisierung der Analysis
1854:	Boole: Formalisierung der Aussagenlogik
1879:	Frege: Formalisierung der Logik erster Stufe
um 1880:	Cantorsche Mengenlehre, Rückführung der Analysis und Arithmetik auf die Mengenlehre
um 1900:	Antinomien: Cantorsche Mengenlehre führt zu Widersprüchen (vgl. die **Russellsche Antinomie** zur *"Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthält"*) $\Longrightarrow$ Notwendigkeit einer neuen Grundlegung der Mathematik/Mengenlehre
um 1900:	Hilberts Programm. Ziel: • Formalisierung der Mathematik • Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Arithmetik
um 1910:	Russel, Whitehead: Mengenlehre mit Typen

um 1920:	Zermelo, Fraenkel: Axiomatische Mengenlehre
1930:	Gödels Vollständigkeitsatz
1931:	**Gödels Unvollständigkeitsätze**
1936:	**Church/Turing**: Es gibt kein Programm, das für alle mathematischen Aussagen entscheidet, ob sie wahr oder falsch sind.

Logik in der Informatik

Anwendungsbereiche der Logik in der Informatik

- Logische Programmierung
- automatisches Beweisen
- Programm-Verifikation
- **Model Checking** (automatische Verifikation)
- **Logik als Datenbank-Anfragesprache**

Model Checking

Zwei Beispiele zur Motivation:

(1) Der Pentium-Fehler

Pentium-Prozessor (1993):

- Zur Effizienz-Steigerung der Division wurden Wertetabellen verwendet.
- ABER: 5 Einträge waren falsch!
  $\rightsquigarrow$ ca. 1 Fehler je 9 Milliarden Divisionen
  ($\Rightarrow$ Fehler durch "Testen" nicht leicht zu finden)

Kosten: ca. 475 Millionen US-Dollar
Intel hat danach viele Experten für automatische Verifikation gesucht!

(2) Die Ariane 5-Rakete (1996)

Messwerte wurden von 64-Bit-Zahlen in 16-Bit-Zahlen umgewandelt.

- Das hatte bei Ariane 4 gut funktioniert
- ABER: aufgrund der technischen Änderungen waren die Werte bei Ariane 5 größer als erwartet
  $\rightsquigarrow$ Überlauf! Das System schaltete sich ab und die Rakete stürzte ab.

Kosten: ca. 370 Millionen US-Dollar

Prinzip der automatischen Verifikation

(1) Modelliere das zu testende System durch ein **Transitionssystem** $\mathcal{T}$ (eine bestimmte logische Struktur; ein beschrifteter Graph).

(2) Drücke die (erwünschte oder unerwünschte) Systemeigenschaft durch eine Formel φ einer geeigneten Logik aus.

(3) Teste, **ob $\mathcal{T}$ die Formel φ erfüllt**.

Logik als Grundlage für Datenbank-Anfragesprachen

Grundprinzip:

- Datenbank $\widehat{=}$ logische Struktur $\mathcal{A}$
- Anfrage $\widehat{=}$ Formel φ einer geeigneten Logik
- Auswerten der Anfrage auf der Datenbank $\widehat{=}$ Testen, ob "$\mathcal{A}$ erfüllt φ" gilt

Details: Vorlesungen *Logik in der Informatik* [Sch16b] und *Einführung in die Datenbanktheorie* [Sch16a].

0.2 Syntax und Semantik der Logik erster Stufe

Abschnitt 0.2 rekapituliert Schreibweisen und Definitionen zur Syntax und Semantik der Logik erster Stufe, die aus der Vorlesung *Logik in der Informatik* [Sch16b] weitgehend bekannt sein sollten.

0.2.1 Strukturen

Die Objekte, über die Formeln der Logik erster Stufe Aussagen treffen können, heißen **Strukturen**. Viele Objekte lassen sich auf natürliche Weise durch solche Strukturen repräsentieren, beispielsweise

- Graphen $G = (V, E)$ oder Bäume $B = (V, E)$,
- die natürlichen Zahlen mit Addition und Multiplikation: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$,
- die reellen Zahlen mit Addition, Multiplikation und Konstanten 0 und 1: $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$,
- relationale Datenbanken.

Die im Folgenden definierten **Signaturen** legen den "Typ" (bzw. das "Format") der entsprechenden Strukturen fest.

Definition 0.1.

Signatur, Vokabular Stelligkeit $\mathrm{ar}(R)$, $\mathrm{ar}(f)$

Eine **Signatur** (auch **Symbolmenge** bzw. **Vokabular**) ist eine Menge σ von Relationssymbolen, Funktionssymbolen und/oder Konstantensymbolen. Jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine **Stelligkeit** (bzw. **Arität**, engl. arity)

$$\mathrm{ar}(R) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{ar}(f) \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$

Wir benutzen hier folgende Notation: $\mathbb{N} := \{\, 0, 1, 2, 3, \dots \,\}$ und $\mathbb{N}_{\geqslant 1} := \mathbb{N} \setminus \{\, 0 \,\}$.

Notation 0.2.

- Der griechische Buchstabe σ bezeichnet in diesem Vorlesungsskript stets eine Signatur.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie $R, P, E, Q, R_1, R_2, \ldots$.
- Für Funktionssymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $f, g, h, f_1, f_2, \ldots$.
- Für Konstantensymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie $c, d, c_1, c_2, \ldots$.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leqslant$ (2-stelliges Relationssymbol) bzw. $+, \cdot$ (2-stellige Funktionssymbole), und als Konstantensymbole Zahlen wie 0, 1.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie unter das Symbol schreiben.

  Beispiel: Die Notation $\underset{2}{R}$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Definition 0.3.
Eine **σ-Struktur** (bzw. Struktur über σ) besteht aus σ-Struktur

- einer nicht-leeren Menge A, dem so genannten **Universum** (bzw. Träger, Grundbereich; engl. domain) von $\mathcal{A}$ und folgenden Komponenten: Universum
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ eine $\mathrm{ar}(R)$-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^{\mathrm{ar}(R)}$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^{\mathrm{ar}(f)} \to A$,
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Notation 0.4.

- Strukturen bezeichnen wir meistens mit kalligraphischen Buchstaben $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G}, \ldots$; das Universum der Strukturen durch die entsprechenden lateinischen Buchstaben $A, B, G, \ldots$.
- Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so schreiben wir oft $\mathcal{A} = (A, (S^{\mathcal{A}})_{S\in\sigma})$, um die Komponenten von $\mathcal{A}$ anzugeben. Falls σ endlich und von der Form

  $$\sigma \;=\; \{\, R_1, \ldots R_k, f_1, \ldots, f_\ell, c_1, \ldots, c_m \,\}$$

  ist, so schreiben wir auch

  $$\mathcal{A} \;=\; \big(\, A, R_1^{\mathcal{A}}, \ldots R_k^{\mathcal{A}}, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_\ell^{\mathcal{A}}, c_1^{\mathcal{A}}, \ldots, c_m^{\mathcal{A}} \,\big)\,,$$

  um eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ zu bezeichnen.

Beispiel 0.5 (Arithmetische Strukturen)**.**
Sei $\sigma_{\mathrm{Ar}} := \{\, \leqslant, +, \cdot, \underline{0}, \underline{1} \,\}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol, $+, \cdot$ zwei 2-stellige Funktionssymbole und $\underline{0}, \underline{1}$ zwei Konstantensymbole sind.

(a) Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur Standardmodell der Arithmetik, $\mathcal{N}$

$$\mathcal{N} \;:=\; \mathcal{A}_{\mathbb{N}} \;:=\; (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, \underline{0}^{\mathcal{N}}, \underline{1}^{\mathcal{N}}),$$

wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $\mathbb{N}$ ist, $+^{\mathcal{N}}$ und $\cdot^{\mathcal{N}}$ die Addition bzw. die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $\underline{0}^{\mathcal{N}}$ bzw. $\underline{1}^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 bzw. 1 sind.

$\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$

(b) Entsprechend können wir σ_{Ar}-Strukturen $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ mit Universum $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ definieren.

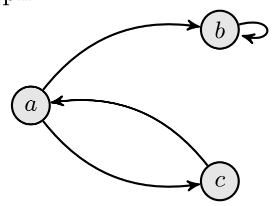
Beispiel 0.6 (Graphen und Bäume)**.**
Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{ E \}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Jeder gerichtete Graph bzw. gerichtete Baum (V, E) (mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$) lässt sich als σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- Universum $A := V$ und
- Relation $E^{\mathcal{A}} := E$

auffassen.

Beispiel:

Graph:



zugehörige σ_{Graph}-Struktur:

$\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit

- $A = \{ a, b, c \}$
- $E^{\mathcal{A}} = \{ (a, b), (b, b), (a, c), (c, a) \}$

Isomorphie

Frage: Wann sind zwei Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ "prinzipiell gleich" (Fachbegriff: isomorph)?

Antwort: Falls $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathcal{A}$ umbenennt. Analog zum Begriff der Isomorphie von Graphen wird dies durch folgende Definition präzisiert:

Definition 0.7.
Isomorphismus
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein **Isomorphismus** von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) π ist bijektiv.

(b) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$

(c) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)\right) = f^{\mathcal{B}}\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big).$$

(d) Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gilt:

$$\pi\left(c^{\mathcal{A}}\right) = c^{\mathcal{B}}.$$

Notation:
$\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ um auszudrücken, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Definition 0.8.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind **isomorph** (kurz: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus π von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

isomorph
$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$

Satz 0.9.
*Isomorphie ($\cong$) ist eine **Äquivalenzrelation** auf der Klasse aller σ-Strukturen, d.h. für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gilt:*

(a) $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ (Reflexivität).

(b) Falls $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, so auch $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ (Symmetrie).

(c) Falls $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$, so auch $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ (Transitivität).

Beweis: *Übung.*

□

0.2.2 Syntax der Logik erster Stufe

Bestandteile:

- aussagenlogische Junktoren

$\neg$,	$\wedge$,	$\vee$,	$\to$
„nicht“	„und“	„oder“	„wenn ..., dann“

- Variablen $v_0, v_1, v_2, \ldots$ um Elemente aus dem Universum einer Struktur zu bezeichnen
- Quantoren: $\exists$ (“es existiert”), $\forall$ (“für alle”)
- Symbole für Elemente aus der Signatur σ

Präzise:

Definition 0.10 (Variablen und Alphabet der Logik erster Stufe)**.**

(a) Eine **Individuenvariable** (kurz: **Variable**) hat die Form v_i, für $i \in \mathbb{N}$.
Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR. D.h.

Variable
VAR

$$\mathsf{VAR} \ := \ \{ v_i \ : \ i \in \mathbb{N} \} \ = \ \{ v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots \}.$$

(b) Sei σ eine Signatur. Das Alphabet $A_{\mathrm{FO}[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

$A_{\mathrm{FO}[\sigma]}$

- den Variablen in VAR
- den Symbolen in σ
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor)
- dem Gleichheitssymbol[1] $=$
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \to$
- den Klammern (,)
- dem Komma ,

Existenzquantor
Allquantor

D.h.:

$$A_{\mathrm{FO}[\sigma]} \ = \ \mathsf{VAR} \cup \sigma \cup \{ \exists, \forall \} \cup \{ = \} \cup \{ \neg, \wedge, \vee, \to \} \cup \{ (,) \} \cup \{ , \}.$$

Notation:

$A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$

$A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$ bezeichnet die Menge aller endlichen Zeichenketten über $A_{\mathrm{FO}[\sigma]}$.

Definition 0.11 (Terme der Logik erster Stufe)**.**

T_σ

σ-Terme

Sei σ eine Signatur. Die Menge T_σ aller **σ-Terme** ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in T_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ ist $x \in T_\sigma$.
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und jedes k-stellige Funktionssymbol $f \in \sigma$ gilt:
  Sind $t_1 \in T_\sigma, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k) \in T_\sigma$.

Definition 0.12 (Formeln der Logik erster Stufe)**.**

FO[σ]

FO[σ]-Formeln

Sei σ eine Signatur. Die Menge **FO**[σ] aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: **FO**[σ]**-Formeln**; FO steht für die englische Bezeichnung **first-order logic**) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$:

(a) Für alle σ-Terme t_1 und t_2 gilt
$$t_1 = t_2 \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma].$$

(b) Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ gilt:
$$R(t_1, \ldots, t_k) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma].$$

(c) Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so auch $\neg\varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.

(d) Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist auch
- $(\varphi \wedge \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
- $(\varphi \vee \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
- $(\varphi \rightarrow \psi) \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.

(e) Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \mathsf{VAR}$, so ist auch
- $\exists x \ \varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$,
- $\forall x \ \varphi \ \in \ \mathrm{FO}[\sigma]$.

Bemerkung:

atomare Formeln

- FO[σ]-Formeln der Form $t_1 = t_2$ bzw. $R(t_1, \ldots, t_k)$ heißen auch **atomare** Formeln.
- In manchen Büchern wird FO[σ] auch mit L_σ bzw. L^σ bezeichnet, und FO[σ]-Formeln werden auch **σ-Ausdrücke** genannt.

Beispiel 0.13.

(a) Sei $\sigma = \{ \underset{2}{f}, c \}$. Folgende Worte sind FO[σ]-Formeln:
- $f(v_0, v_1) = c$
- $\forall v_2 \ f(v_2, c) = v_2$

[1]Manche Bücher schreiben $\equiv$ an Stelle von $=$

- $\neg\,\exists v_3\ (f(v_2, v_3) = v_3\ \wedge\ \neg\, v_3 = c)$

Folgende Worte sind keine FO[σ]-Formeln:

- $(f(v_0, v_1) = c)$
- $f(v_0, v_1)$ (dies ist ein σ-Term, aber keine FO[σ]-Formel)
- $(\forall v_2\ (f(v_2, c) = v_2))$
- $\exists c\ f(v_0, c) = v_0$

(b) Sei $\sigma_{\text{Graph}} = \{\underset{2}{E}\}$. Folgendes ist eine FO[$\sigma_{\text{Graph}}$]-Formel:

$$\forall v_0\, \forall v_1\ \Big(\big(E(v_0, v_1) \wedge E(v_1, v_0)\big)\ \rightarrow\ v_0 = v_1 \Big).$$

Intuition zur Semantik (die formale Definition der Semantik wird auf den nächsten Seiten angegeben):

In einem gerichteten Graphen $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ sagt die Formel

$$\forall v_0\, \forall v_1\ \Big(\big(E(v_0, v_1) \wedge E(v_1, v_0)\big)\ \rightarrow\ v_0 = v_1 \Big)$$

Folgendes aus:

„Für alle Knoten $a_0 \in A$ und für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:

Falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $a_0 = a_1$“.

Die Formel sagt in einem Graphen $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ also gerade aus, dass die Kantenrelation **antisymmetrisch** ist. Ein Graph $\mathcal{A} = \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ **erfüllt** die Formel genau dann, wenn die Kantenrelation $E^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation 0.14.

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, x_1, x_2, \ldots$.
- Formeln bezeichnen wir meistens mit griechischen Kleinbuchstaben $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
  Formel**mengen** mit griechischen Großbuchstaben $\Phi, \Psi, \ldots$. Formelmengen
- Bezüglich Klammerung verwenden wir folgende Bindungsregeln: Bindungsregeln
  (a) $\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren.
  (b) $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$.
- Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir manchmal weg.
  D.h. wir schreiben z.B. $\varphi \wedge \psi\ \rightarrow\ \chi$ an Stelle von $((\varphi \wedge \psi)\ \rightarrow\ \chi))$.
- Für gewisse 2-stellige Funktionssymbole wie $+, \cdot \in \sigma_{\text{Ar}}$ und gewisse 2-stellige Relationssymbole wie $\leqslant$ verwenden wir **Infix- statt Präfixschreibweise** und setzen Klammern dabei auf natürliche Weise, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten. Infixschreibweise

  Beispiel:
  - An Stelle des (formal korrekten Terms) $\cdot(+(v_1, v_2), v_3)$ schreiben wir $(v_1 + v_2) \cdot v_3$.
  - An Stelle der (formal korrekten) atomaren Formel $\leqslant (v_1, v_2)$ schreiben wir $v_1 \leqslant v_2$.
- Bei Termen und atomaren Formeln schreiben wir manchmal
  - $Rt_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $R(t_1, \ldots, t_k)$,
  - $ft_1 \ldots t_k$ an Stelle des (formal korrekten) $f(t_1, \ldots, t_k)$.

0.2.3 Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Notationen:

sub(φ)
Subformeln
Teilformeln

Definition 0.15 (Subformeln bzw. Teilformeln).
Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{sub}(\varphi) \subseteq \text{FO}[\sigma]$ aller **Subformeln** (oder: **Teilformeln**) von φ wie folgt:

- Ist φ eine atomare σ-Formel, so $\text{sub}(\varphi) \ := \ \{\, \varphi \,\}$.
- Ist φ von der Form $\neg\,\psi$ für eine FO[σ]-Formel ψ, so ist $\text{sub}(\varphi) \ := \ \{\, \varphi \,\} \cup \text{sub}(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 {*} \psi_2)$ für $* \in \{\, \wedge, \vee, \rightarrow \,\}$ und FO[σ]-Formeln ψ_1 und ψ_2, so $\text{sub}(\varphi) \ := \ \{\, \varphi \,\} \cup \text{sub}(\psi_1) \cup \text{sub}(\psi_2)$.
- Ist φ von der Form $Qx\ \psi$ für $Q \in \{\, \exists, \forall \,\}$, $x \in \mathsf{VAR}$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\text{sub}(\varphi) \ := \ \{\, \varphi \,\} \cup \text{sub}(\psi).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\text{sub}\Big(\ \forall v_0\, \forall v_1 \ \big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow \ v_0 = v_1 \big) \ \Big) \ = \\
\Big\{ \forall v_0\, \forall v_1 \ \big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow \ v_0 = v_1 \big), \\
\forall v_1 \ \big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow \ v_0 = v_1 \big), \\
\big(\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big) \ \rightarrow v_0 = v_1 \big), \\
\big(E(v_0,v_1) \wedge E(v_1,v_0)\big), \\
v_0 = v_1, \\
E(v_0,v_1), \\
E(v_1,v_0) \Big\}
\end{aligned}$$

var(t)

Definition 0.16 (Variablen in Termen).
Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\text{var}(t) \subseteq \mathsf{VAR}$ der **Variablen von** t wie folgt:

- Für $x \in \mathsf{VAR}$ ist $\text{var}(x) := \{\, x \,\}$.
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $\text{var}(c) := \emptyset$.
- Ist $t \in T_\sigma$ von der Form $f(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $f \in \sigma$ ein k-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist $\text{var}(t) := \text{var}(t_1) \cup \cdots \cup \text{var}(t_k)$.

frei(φ)
Freie Variablen

Definition 0.17 (Freie Variablen in Formeln).
Für jede FO[σ]-Formel φ definieren wir die Menge $\text{frei}(\varphi) \subseteq \mathsf{VAR}$ aller **freien Variablen von** φ wie folgt:

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{var}(t_1) \cup \text{var}(t_2).$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \dots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$ ein k-stelliges Relationssymbol ist und $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{var}(t_1) \cup \dots \cup \text{var}(t_k).$$

- Ist φ von der Form $\neg\,\psi$ mit $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{frei}(\psi).$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{frei}(\psi_1) \cup \text{frei}(\psi_2).$$

- Ist φ von der Form $Qx\,\psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathsf{VAR}$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$, so ist

$$\text{frei}(\varphi) \ := \ \text{frei}(\psi) \setminus \{x\}.$$

Beispiel: $\varphi \ := \ \underbrace{(\ \underbrace{f(v_0, c) = v_3}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_3} \ \wedge \ \underbrace{\exists v_0 \ \underbrace{f(v_0, v_1) = c}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_1}}_{\text{freie Variablen: } v_1} \ )}_{\text{freie Variablen: } v_0, v_1, v_3}$

Definition 0.18 (Sätze)**.**
Eine FO[σ]-Formel φ heißt **Satz** (genauer: FO[σ]-Satz), falls $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$. Satz
Die Menge aller FO[σ]-Sätze bezeichnen wir mit S_σ. S_σ

Definition 0.19 (Belegungen und Interpretationen)**.**

(a) Eine **Belegung in einer σ-Struktur** $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\beta : D \to A$ mit $\text{Def}(\beta) := D \subseteq \mathsf{VAR}$. Belegung in einer σ-Struktur

(b) Eine Belegung β heißt **passend zu** $t \in T_\sigma$, falls $\text{Def}(\beta) \supseteq \text{var}(t)$. passende Belegung

(c) Eine Belegung β heißt **passend zu** $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (bzw. eine Belegung **für** φ), wenn $\text{Def}(\beta) \supseteq \text{frei}(\varphi)$.

(d) Eine **σ-Interpretation** ist ein Paar $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$. σ-Interpretation

(e) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ heißt **passend zu** (oder **Interpretation für**) $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ (bzw. $t \in T_\sigma$), falls β passend zu φ (bzw. t) ist. passende σ-Interpretation

Definition 0.20 (Semantik von σ-Termen)**.**
Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder zu t passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$

- Für alle $x \in \mathsf{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle σ-Terme $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$[\![f(t_1, \dots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \ f^{\mathcal{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right).$$

Beispiel:
Sei $\sigma := \{ \underset{2}{f}, c \}$, und sei $\mathcal{A} := \big(A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}\big)$ mit $A := \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathcal{N}}$ (die Addition auf $\mathbb{N}$), $c^{\mathcal{A}} := 0$. Sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$. Sei $t := f(v_2, f(v_1, c)) \in T_\sigma$. Dann gilt

$$\begin{aligned} [\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\left([\![v_2]\!]^{\mathcal{I}}, [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\ &= [\![v_2]\!]^{\mathcal{I}} + [\![f(v_1,c)]\!]^{\mathcal{I}} \\ &= \beta(v_2) + f^{\mathcal{A}}\left([\![v_1]\!]^{\mathcal{I}}, [\![c]\!]^{\mathcal{I}}\right) \\ &= 7 + \big(\beta(v_1) + c^{\mathcal{A}}\big) \\ &= 7 + (1 + 0) \\ &= 8. \end{aligned}$$

Definition 0.21.

$\beta\frac{a}{x}$

(a) Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, ist $x \in \mathsf{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei $\beta\frac{a}{x}$ die Belegung mit $\mathrm{Def}\big(\beta\frac{a}{x}\big) := \mathrm{Def}(\beta) \cup \{ x \}$, die für alle $y \in \mathrm{Def}\big(\beta\frac{a}{x}\big)$ definiert ist durch

$$\beta\tfrac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\mathcal{I}\frac{a}{x}$

(b) Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \mathsf{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

$$\mathcal{I}\tfrac{a}{x} := \big(\mathcal{A}, \beta\tfrac{a}{x}\big).$$

Definition 0.22 (Semantik der Logik erster Stufe)**.**

Wahrheitswert
$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$

Rekursiv über den Aufbau von $\mathrm{FO}[\sigma]$ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ und jeder zu φ passenden σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen **Wahrheitswert** (kurz: **Wert**) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{ 0, 1 \}$ zuordnet:

- Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ ist
$$[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Für jedes $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, jedes k-stellige Relationssymbol $R \in \sigma$ und alle $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ ist
$$[\![R(t_1,\dots,t_k)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\big) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
- Für alle $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist
$$[\![\neg\,\psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0 & \text{falls } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1. \end{cases}$$
- Für alle $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist
  - $[\![(\psi_1 \wedge \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

– $[\![(\psi_1 \vee \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \begin{cases} 0 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1 & \text{sonst (d.h. } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ oder } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1). \end{cases}$

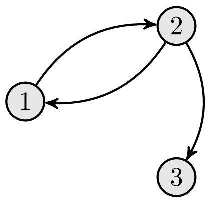
– $[\![(\psi_1 \to \psi_2)]\!]^{\mathcal{I}} \ := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ oder } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0 & \text{sonst (d.h. } [\![\psi_1]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi_2]\!]^{\mathcal{I}} = 0). \end{cases}$

- Für alle $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $x \in \mathsf{VAR}$ ist
  – $[\![\exists x\ \psi]\!]^{\mathcal{I}} \ := \begin{cases} 1 & \text{falls es mindestens ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst (d.h. für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 0). \end{cases}$
  – $[\![\forall x\ \psi]\!]^{\mathcal{I}} \ := \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Beispiel:

- $\sigma := \{ \underset{2}{E} \}$, $\varphi := \forall x\, \forall y\ (E(x,y) \ \to \ E(y,x))$
- $\mathcal{A} := \big(A, E^{\mathcal{A}}\big)$ mit $A = \{1,2,3\}$, $E^{\mathcal{A}} = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$

  Skizze: $\mathcal{A}$:



- β sei die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta) = \emptyset$
- $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$
- $$\begin{aligned} [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \quad &\iff \quad \text{für alle } a \in A, \text{ für alle } b \in A \text{ gilt: } [\![(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1 \\ &\iff \quad \text{für alle } a \in A, \text{ für alle } b \in A \text{ gilt: } (a,b) \notin E^{\mathcal{A}} \text{ oder } (b,a) \in E^{\mathcal{A}} \\ &\iff \quad \text{für alle } a \in A, \text{ für alle } b \in A \text{ gilt: falls } (a,b) \in E^{\mathcal{A}}, \text{ so auch } (b,a) \in E^{\mathcal{A}} \\ &\iff \quad E^{\mathcal{A}} \text{ ist symmetrisch.} \end{aligned}$$

  Da in unserem konkreten Graphen $\mathcal{A}$ für $a = 2$, $b = 3$ gilt: $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$, aber $(b,a) \notin E^{\mathcal{A}}$, ist hier $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0$.

Definition 0.23 (Modell, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)**.**
Sei φ eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel.

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ **erfüllt** φ (bzw.: **ist ein Modell von** φ, kurz: $\mathcal{I} \models \varphi$), falls $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$. — Modell, $\mathcal{I} \models \varphi$

(b) φ heißt **erfüllbar**, falls es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt. — erfüllbar
φ heißt **unerfüllbar**, falls φ nicht erfüllbar ist. — unerfüllbar

(c) φ heißt **allgemeingültig**, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt. — allgemeingültig

Beobachtung:
Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

- φ allgemeingültig $\iff$ $\neg\,\varphi$ unerfüllbar.
- φ erfüllbar $\iff$ $\neg\,\varphi$ nicht allgemeingültig.

Beispiel 0.24. (Graphen)
Sei $\sigma := \{\underset{2}{E}\}$, und sei $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ eine σ-Struktur.

(a) Für alle $a, b \in A$ gilt: Es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg der Länge 3 von a nach b $\iff$

$$(\mathcal{A}, \beta_\emptyset) \quad \models \quad \forall x\, \forall y\; \exists z_1\, \exists z_2\; \big(E(x, z_1) \land E(z_1, z_2) \land E(z_2, y)\big).$$

Hierbei ist $\beta_\emptyset$ die Belegung mit $\mathrm{Def}(\beta_\emptyset) = \emptyset$.

(b) $\mathcal{A}$ hat Durchmesser $\leqslant 3$, d.h. zwischen je zwei Knoten von $\mathcal{A}$ gibt es einen Weg der Länge $\leqslant 3$ $\iff$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}, \beta_\emptyset) \quad \models \quad \forall x\, \forall y\; \Big(\; & x = y \;\lor\; E(x, y) \;\lor\; \exists z\; \big(E(x, z) \land E(z, y)\big) \;\lor \\ & \exists z_1\, \exists z_2\; \big(E(x, z_1) \land E(z_1, z_2) \land E(z_2, y)\big)\; \Big).\end{aligned}$$

Beispiel 0.25 (Arithmetik)**.**
Sei $\sigma_{\mathrm{Ar}} = \{\leqslant, +, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$, sei $\mathcal{N} := \big(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, \underline{0}^{\mathcal{N}}, \underline{1}^{\mathcal{N}}\big)$, seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, und sei β die Belegung mit $\beta(v_1) = a,\ \beta(v_2) = b,\ \beta(v_3) = c$.

(a) $a \,|\, b$ („a teilt b in $\mathbb{N}$") $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2)$ mit

$$\varphi_{\text{teilt}}(v_1, v_2) \quad := \quad \exists v_0\; v_1 \cdot v_0 \;= v_2\ .$$

(b) $c = a - b$ $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{-}(v_1, v_2, v_3)$ mit

$$\varphi_{-}(v_1, v_2, v_3) \quad := \quad v_2 + v_3 = v_1.$$

(c) a ist eine Primzahl $\iff$ $(\mathcal{N}, \beta) \models \varphi_{\text{prim}}(v_1)$ mit

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{prim}}(v_1) \quad := \quad & \neg\, v_1 = \underline{0} \;\land\; \neg\, v_1 = \underline{1} \;\land \\ & \forall v_4\, \forall v_5\; \big(v_1 = v_4 \cdot v_5 \;\to\; (v_4 = \underline{1} \;\lor\; v_5 = \underline{1})\big).\end{aligned}$$

(d) Es gibt unendlich viele verschiedene Primzahlen $\iff$

$$(\mathcal{N}, \beta) \quad \models \quad \forall v_0\; \exists v_1 \quad \big(v_0 \leqslant v_1 \;\land\; \varphi_{\text{prim}}(v_1)\big),$$

wobei β eine beliebige Belegung in $\mathcal{N}$ ist.

0.2.4 Das Koinzidenzlemma

Das Koinzidenzlemma präzisiert den (anschaulich offensichtlichen) Sachverhalt, dass die Frage, ob eine FO[σ]-Formel φ von einer σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ erfüllt wird (d.h. ob $\mathcal{I} \models \varphi$ gilt), nur abhängt von

- der Belegung der in φ frei vorkommenden Variablen (d.h. für Variablen $x \notin \text{frei}(\varphi)$ ist egal, welchen Wert $\beta(x)$ annimmt) und
- der Interpretation $S^{\mathcal{A}}$ der Symbole $S \in \sigma$, die in φ vorkommen (d.h. für Symbole $S' \in \sigma$, die nicht in φ erwähnt werden, ist egal, wie $(S')^{\mathcal{A}}$ aussieht).

Zur präzisen Formulierung des Koinzidenzlemmas sind folgende Notationen nützlich:

Definition 0.26.
Seien σ_1, σ_2 zwei Signaturen. Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation mit $A_1 = A_2$ (d.h. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ haben dasselbe Universum).

(a) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$) **stimmen auf einem Symbol S überein**, wenn $S \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $S^{\mathcal{A}_1} = S^{\mathcal{A}_2}$.

(b) $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. β_1 und β_2) **stimmen auf einer Variablen x überein**, wenn $x \in \text{Def}(\beta_1) \cap \text{Def}(\beta_2)$ und $\beta_1(x) = \beta_2(x)$.

Satz 0.27 (Koinzidenzlemma)**.**
Seien σ, σ_1, σ_2 Signaturen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$. Für $i \in \{1, 2\}$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation, so dass $A_1 = A_2$.

(a) Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.

(b) Sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen. Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen: Per Induktion nach dem Aufbau von T_σ $\big($bei (a)$\big)$ bzw. FO[σ] $\big($bei (b)$\big)$.
Details: Übung. $\square$

Bemerkung 0.28.
Wegen des Koinzidenzlemmas können wir einerseits o.B.d.A. annehmen, dass Belegungen "minimal" sind (d.h. ihr Definitionsbereich enthält gerade die freien Variablen einer Formel oder eines Terms). Andererseits können wir aber auch annehmen, dass ihr Definitionsbereich "maximal" ist (d.h. **alle** Variablen aus VAR enthält). Beides wird gelegentlich nützlich sein.

Notation 0.29.

(a) Für $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ schreiben wir $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, um auszudrücken, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.
Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\text{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \dots, x_1\} \supseteq \text{frei}(\varphi)$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $a_i := \beta(x_i)$. An Stelle von $\mathcal{I} \models \varphi$ schreiben wir oft auch $\mathcal{A} \models \varphi[\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_n}]$.

Beachte: Diese Schreibweise ist zulässig, da nach dem Koinzidenzlemma für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt:

$$\mathcal{I}' \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi.$$

(b) Um die Notation weiter zu vereinfachen schreiben wir auch kurz

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{an Stelle von} \quad \mathcal{A} \models \varphi\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \ldots, \tfrac{a_n}{x_n}\right].$$

(c) Für **FO[σ]-Sätze** φ schreiben wir einfach

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \text{an Stelle von} \quad \text{“}(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \text{ für eine Belegung } \beta\text{”}.$$

Beachte: Gemäß Koinzidenzlemma gilt für alle Belegungen β und β', dass

$$(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, \beta') \models \varphi.$$

(d) Ähnliche Schreibweisen verwenden wir für Terme:

- Ist $t \in T_\sigma$ mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, so schreibe kurz auch $t(x_1, \ldots, x_n)$.
- Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{Def}(\beta) \supseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $a_i := \beta(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, so schreibe an Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ auch

$$t^{\mathcal{A}}\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \ldots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \quad \text{bzw.} \quad t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n].$$

- An Stelle von $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ schreiben wir manchmal auch $\mathcal{I}(t)$.

Definition 0.30 (Redukte und Expansionen)**.**
Seien σ, τ Signaturen mit $\tau \subseteq \sigma$.

Redukt $\mathcal{A}_{|\tau}$

(a) Das **τ-Redukt** einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die τ-Struktur $\mathcal{A}_{|\tau}$ mit Universum $A_{|\tau} = A$, die mit $\mathcal{A}$ auf allen Symbolen aus τ übereinstimmt.

Expansion

(b) Eine **σ-Expansion** einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, für die gilt: $\mathcal{A}_{|\tau} = \mathcal{B}$.

Beispiel 0.31.
Zur Erinnerung: Das Standardmodell der Arithmetik ist

$$\mathcal{N} = \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \cdot^{\mathcal{N}}, \underline{0}^{\mathcal{N}}, \underline{1}^{\mathcal{N}}\right).$$

Das $\{\leqslant, +, \underline{0}\}$-Redukt von $\mathcal{N}$ ist

$$\mathcal{N}_{|\{\leqslant,+,\underline{0}\}} = \left(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \underline{0}^{\mathcal{N}}\right).$$

Presburger Arithmetik

Die Struktur $\mathcal{N}_{|\{\leqslant,+,\underline{0}\}}$ bezeichnet man als das **Standardmodell der Presburger Arithmetik** (benannt nach M. Presburger, 1904–1943).

0.2.5 Das Isomorphielemma

Das folgende Isomorphielemma besagt, dass zwei σ-Strukturen, die isomorph sind, genau dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen. D.h. isomorphe Strukturen können nicht durch FO[σ]-Sätze unterschieden werden.

Satz 0.32 (Isomorphielemma)**.**
Sei φ ein FO[σ]*-Satz und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

Beweis:
Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Behauptung 1.
Für alle σ-Terme $t(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\pi(t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n]) \quad = \quad t^{\mathcal{B}}[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)].$$

Beweis von Behauptung 1:
Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von T_σ.
Details: Übung.

$\square_{\text{Behauptung 1}}$

Behauptung 2.
Für alle FO[σ]-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\,a_1, \dots, a_n\,] \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi[\,\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\,].$$

Beweis von Behauptung 2:
Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von FO[σ].
Details: Übung.

$\square_{\text{Behauptung 2}}$

Beachte: Die Aussage von Satz 0.32 folgt direkt aus Behauptung 2.

$\square_{\text{Satz 0.32}}$

Obiger Beweis zeigt sogar folgendes Resultat:

Korollar 0.33.
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Für jede FO[$\sigma$]*-Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[\,a_1, \dots, a_n\,] \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi[\,\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\,].$$

0.3 Substitutionen

Die in diesem Abschnitt definierten *Substitutionen* liefern einen Begriff des „Ersetzens“ von Variablen durch Terme, für den Folgendes gilt:

> Sei φ eine FO[σ]-Formel. Ersetzt man in φ eine freie Variable x durch einen Term $t(y_1, \dots, y_n)$, so sagt die dadurch entstehende Formel φ' über den Term $t(y_1, \dots, y_n)$ dasselbe aus wie die Formel φ über die Variable x.

Etwas Vorsicht ist allerdings beim „Ersetzen“ geboten:

Beispiel 0.34.
Betrachte die FO[σ_{Ar}]-Formel

$$\varphi(v_0) \;:=\; \exists v_1 \; v_1 + v_1 = v_0,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_0 eine gerade Zahl ist.

(a) Ersetzt man die Variable v_0 durch die Variable v_5, so erhält man die Formel

$$\psi(v_5) \;=\; \exists v_1\; v_1 + v_1 = v_5,$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass v_5 gerade ist.

(b) Ersetzt man die Variable v_0 durch den Term $(v_0 \cdot v_0) + \underline{1}$, so erhält man die Formel

$$\exists v_1\; v_1 + v_1 = (v_0 \cdot v_0) + \underline{1},$$

die in $\mathcal{N}$ besagt, dass $(v_0 \cdot v_0) + \underline{1}$ gerade ist.

(c) Ersetzt man aber die (gebundene) Variable v_1 durch die (freie) Variable v_0, so erhält man die Formel

$$\exists v_0\; v_0 + v_0 = v_0.$$

Diese Formel hat eine völlig andere Bedeutung als die Formel $\varphi(v_0)$.

Daher sollte man nur freie Variablen ersetzen!

(d) Ersetzt man die (freie) Variable v_0 durch v_1, so erhält man die Formel

$$\exists v_1\; v_1 + v_1 = v_1,$$

die ähnlich wie in (c) eine ganz andere Bedeutung hat als die Formel $\varphi(v_0)$.

Beim Ersetzen von freien Variablen muss man daher aufpassen, dass es keine Konflikte mit gebundenen Variablen gibt! Die gebundenen Variablen werden dazu — falls nötig — umbenannt.

Der Begriff des „Ersetzens“ von Variablen wird daher folgendermaßen formalisiert:

Definition 0.35.

σ-Substitution

(a) Eine **σ-Substitution** ist eine Abbildung

$$\mathcal{S} \;:\; D \;\to\; T_\sigma,$$

wobei $D = \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{VAR}$ *endlich* ist.

$\mathrm{var}(\mathcal{S})$

(b) Für eine **σ-Substitution** $\mathcal{S}$ sei $\mathrm{var}(\mathcal{S})$ die Menge aller Variablen, die in einem Term im *Bild* von $\mathcal{S}$ vorkommen. D.h.:

$$\mathrm{var}(\mathcal{S}) \;:=\; \bigcup_{x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S})} \mathrm{var}(\mathcal{S}(x)).$$

Definition 0.36 (Anwenden von Substitutionen auf Interpretationen)**.**
Für jede σ-Substitution $\mathcal{S}$ und jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathrm{var}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}\mathcal{S} \;:=\; (\mathcal{A}, \beta\mathcal{S}),$$

wobei $\beta\mathcal{S} : \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \to A$ die folgendermaßen definierte Belegung ist:

- Für alle $x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ ist $\beta\mathcal{S}(x) := [\![\mathcal{S}(x)]\!]^{\mathcal{I}}$.

- Für alle $x \in \mathrm{Def}(\beta) \setminus \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ ist $\beta\mathcal{S}(x) := \beta(x)$.

Definition 0.37 (Substitution in Termen)**.**
Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution. Induktiv über den Aufbau von T_σ definieren wir für jedes $t \in T_\sigma$ den Term $t\mathcal{S}$, der aus t durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht: *$t\mathcal{S}$*

- Für alle $x \in \mathsf{VAR}$ ist
$$x\mathcal{S} \;:=\; \begin{cases} \mathcal{S}(x) & \text{falls } x \in \mathrm{Def}(\mathcal{S}) \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist
$$c\mathcal{S} \;:=\; c.$$

- Für alle $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ ist
$$f(t_1, \ldots, t_k)\mathcal{S} \;:=\; f(t_1\mathcal{S}, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

Lemma 0.38 (Substitutionslemma für Terme)**.**
Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{var}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$.
Für alle σ-Terme t mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ gilt:
$$[\![t\mathcal{S}]\!]^{\mathcal{I}} \;=\; [\![t]\!]^{\mathcal{I}\mathcal{S}}.$$

Beweis:
Per Induktion über den Aufbau von Termen. Details: Übung.

$\square$

Definition 0.39 (Substitution in Formeln)**.**
Induktiv über den Aufbau von $\mathrm{FO}[\sigma]$ definieren wir für alle σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ und alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ die Formel $\varphi\mathcal{S}$, die aus φ durch **Anwenden** der Substitution $\mathcal{S}$ entsteht: *$\varphi\mathcal{S}$*

- Ist φ von der Form $t_1 = t_2$ mit $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; t_1\mathcal{S} = t_2\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ mit $R \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(R)$, $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; R(t_1\mathcal{S}_1, \ldots, t_k\mathcal{S}).$$

- Ist φ von der Form $\neg\psi$ mit $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; \neg\, \psi\mathcal{S}.$$

- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, so
$$\varphi\mathcal{S} \;:=\; (\,\psi_1\mathcal{S} \;*\; \psi_2\mathcal{S}\,).$$

- Ist φ von der Form $Qx\ \psi$ mit $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathsf{VAR}$, $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so ist

$$\varphi\mathcal{S} \ := \ Qy\ \psi\mathcal{S}',$$

wobei y und $\mathcal{S}'$ wie folgt gewählt sind:
  - Sei $U := \{u \in \mathrm{Def}(\mathcal{S}) : u \in \mathrm{frei}(\varphi) \text{ und } u \neq \mathcal{S}(u)\}$ (insbes. ist $x \notin U$, da $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$).
  - Falls $x \notin \mathrm{var}(\mathcal{S}_{|U})$, d.h. x kommt *nicht* in $\{\mathcal{S}(u) : u \in U\}$ vor, so setze $y := x$.
  - Falls $x \in \mathrm{var}(\mathcal{S}_{|U})$, so sei y die erste Variable in der Aufzählung $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$ von VAR, die weder in φ noch in $\mathrm{var}(\mathcal{S}_{|U})$ vorkommt.
  - Setze $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_{|U} \cup \{(x, y)\}$, d.h.:
    $\mathrm{Def}(\mathcal{S}') = U \cup \{x\}$, $\mathcal{S}'(x) = y$ und $\mathcal{S}'(u) = \mathcal{S}(u)$ für alle $u \in U$.

Notation 0.40.

(a) Wir schreiben σ-Substitutionen $\mathcal{S}$ mit $\mathrm{Def}(\mathcal{S}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $t_i = \mathcal{S}(x_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ auch in der Form

$$\tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}.$$

Insbesondere schreiben wir für $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln φ auch

$$\varphi\tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n} \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi\mathcal{S}.$$

(b) Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und für Terme $t_1, \ldots, t_n$ schreiben wir auch

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{an Stelle von} \quad \varphi\tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}.$$

Entsprechende Schreibweisen verwenden wir auch für Terme.

Beispiel 0.41.
Sei $\sigma := \{\underset{2}{f}, \underset{2}{R}\}$.

(a) Für $\varphi := R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\varphi\tfrac{v_2,v_0,v_1}{v_1,v_2,v_3} \ = \ R\big(v_0, f(v_2, v_0)\big).$$

(b) Für $\varphi := \exists v_0\ R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\tfrac{v_4,f(v_1,v_1)}{v_0,v_2} \ &= \ \exists v_0\ \big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\tfrac{f(v_1,v_1),v_0}{v_2,\quad v_0}\, \big] \\ &= \ \exists v_0\ R\big(v_0, f\big(v_1, f(v_1, v_1)\big)\big).\end{aligned}$$

(c) Für $\varphi := \exists v_0\ R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi\tfrac{v_0,v_4}{v_1,v_0} \ &= \ \exists v_3\ \big[\, R\big(v_0, f(v_1, v_2)\big)\tfrac{v_0,v_3}{v_1,v_0}\, \big] \\ &= \ \exists v_3\ R\big(v_3, f(v_0, v_2)\big).\end{aligned}$$

Das im folgenden Satz 0.42 formulierte Substitutionslemma für Formeln sowie das darauf folgende Lemma 0.43 zeigen, dass der obige Substitutionsbegriff “sinnvoll” gewählt ist.

Satz 0.42 (Substitutionslemma für Formeln).
Sei $\mathcal{S}$ eine σ-Substitution und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathrm{var}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{Def}(\beta)$.
Für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formeln φ mit* $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{Def}(\beta) \cup \mathrm{Def}(\mathcal{S})$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi\mathcal{S} \quad \iff \quad \mathcal{I}\mathcal{S} \models \varphi.$$

Beweis:
Per Induktion über den Aufbau von Formeln, unter Verwendung von Lemma 0.38.
Details: Übung.

□

Lemma 0.43.
Für jeden σ-Term t, jede $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel φ und jede Variable $x \in \mathsf{VAR}$ gilt:* $t\frac{x}{x} = t$ *und* $\varphi\frac{x}{x} = \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen per Induktion nach dem Aufbau von Formeln. Details: Übung.

□

0.4 Literaturhinweise

Abschnitt 0.1 orientiert sich an Kapitel 1 aus [Sch07]; Zur weiteren Lektüre werden jeweils das erste Kapitel und die Einleitung von [EFT98] und [Lib04] empfohlen. Der Artikel [HHI+07] bietet einen Überblick über verschiedene Anwendungsgebiete der Logik in der Informatik. Einen Einblick in die Geschichte der logischen Grundlagen der Mathematik gibt der Comic [DPPD09]. Mehr Details zu Syntax und Semantik der Logik erster Stufe, zum Koinzidenzlemma, dem Isomorphielemma und Substitutionen finden sich in Kapitel 2 und 3 in [EFT98].

0.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 0.1.
Geben Sie σ_{Ar}-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(a) Jede natürliche Zahl ist Summe von vier Quadratzahlen.

(b) Jede Primzahl ist Summe zweier Quadratzahlen.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}$, so dass $p = 3m + 2$ für eine Zahl $m \in \mathbb{N}$.

(d) $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. es gibt keine Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

(e) Jede zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt einen Teiler $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leqslant \sqrt{n}$.

Aufgabe 0.2.
Die Signatur σ bestehe aus einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem 1-stelligen Relationssymbol P. Betrachten Sie die $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln

(a) $\varphi_1 := \exists v_0 \, \forall v_1 \; f(v_0, v_1) = v_1$

(b) $\varphi_2 := \exists v_0 \big(P(v_0) \;\wedge\; \forall v_1 \; P(f(v_0, v_1)) \big)$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ σ-Interpretationen $\mathcal{I}_i$ und $\mathcal{J}_i$ an mit $\mathcal{I}_i \models \varphi_i$ und $\mathcal{J}_i \not\models \varphi_i$.

Aufgabe 0.3.
Sei σ eine Signatur, die aus endlich vielen Symbolen besteht und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur, deren Universum A endlich ist.

(a) Geben Sie einen FO$[\sigma]$-Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$ an, der die Struktur $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie eindeutig beschreibt. Das heißt es soll für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten: $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

(b) Beweisen Sie, dass ihre Formel $\varphi_{\mathcal{A}}$ die in (a) geforderte Eigenschaft tatsächlich besitzt. Das heißt, zeigen Sie, dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$.

Aufgabe 0.4.
Sei $\sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ sowie zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b besteht.
Einem endlichen Wort $w = w_1 \cdots w_n$ der Länge $n \geqslant 1$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ ordnen wir die folgende σ-Struktur $\mathcal{A}_w = \left(A_w, \leqslant^{\mathcal{A}_w}, P_a^{\mathcal{A}_w}, P_b^{\mathcal{A}_w}\right)$ zu:

- $A_w := \{1, \ldots, n\}$,
- $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $\{1, \ldots, n\}$,
- $P_a^{\mathcal{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = a \,\}$,
- $P_b^{\mathcal{A}_w} := \{\, i \in A_w \ : \ w_i = b \,\}$.

Ein FO$[\sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

(a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO$[\sigma]$-Satz φ_0?

$$\varphi_0 \ := \ \exists x\, \exists y \,\Big(\big(x \leqslant y \ \wedge \ \neg x{=}y \,\big) \ \wedge \ \forall z \,\big((z \leqslant x \wedge P_a(z)) \ \vee \ (y \leqslant z \wedge P_b(z)) \big) \Big)$$

(b) Geben Sie einen FO$[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $a(a|b)^*bb(a|b)^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Können Sie auch einen FO$[\sigma]$-Satz finden, der die Sprache aller Worte beschreibt, in denen die Anzahl der in ihnen vorkommenden as gerade ist?
Falls ja, geben Sie den Satz an; falls nein, versuchen Sie zu erklären, warum es keinen solchen Satz zu geben scheint.

Aufgabe 0.5.
Beweisen Sie das Koinzidenzlemma (Satz 0.27).

Aufgabe 0.6.
Beweisen Sie das Isomorphielemma (Satz 0.32).

Aufgabe 0.7.
Es sei R ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 2-stelliges Funktionssymbol. Berechnen Sie

(a) $\big(R(v_1, v_2) \wedge f(v_0, v_2){=}v_1\big) \ \frac{f(v_0,v_2),\ f(v_1,v_5)}{v_0 \quad , \quad v_2}$

(b) $\exists v_1 \big(R(v_1, v_2) \wedge f(v_0, v_2){=}v_1\big) \ \frac{v_2,\ v_3}{v_0,\ v_2}$

(c) $\exists v_1 \big(R(v_1, v_2) \wedge \forall v_2\, f(v_0, v_2){=}v_1\big) \ \frac{f(v_0,v_2),\ v_3}{v_1 \quad ,\ v_2}$

(d) $\exists v_1 \big(R(v_0, v_2) \land \forall v_0\, R(v_1, f(v_4, v_0))\big) \ \frac{f(v_1,v_2),\ v_0}{v_0 \quad\ ,\ v_3}$

Aufgabe 0.8.
Es sei f ein 2-stelliges Funktionssymbol. Betrachten Sie die Substitution $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{S}(v_1) := f(v_0, v_0)$, $\mathcal{S}(v_2) := f(v_0, v_1)$ und $\mathcal{S}(v_3) := f(v_1, v_0)$. Berechnen Sie $\varphi\mathcal{S}$ für die folgenden Formeln φ:

(a) $v_3 = f(v_1, v_2)$

(b) $\forall v_2\ v_3{=}f(v_1, v_2)$

(c) $\exists v_1\ v_3{=}f(v_1, v_2)$

(d) $\exists v_1\, \forall v_2\ v_3{=}f(v_1, v_2)$.

Aufgabe 0.9.
Beweisen Sie das Substitutionslemma (Satz 0.42).

1 Der Vollständigkeitssatz

Ziel dieses Kapitels ist, ein "formales Beweissystem", den so genannten **Sequenzenkalkül**, kennenzulernen, mit dem man alle allgemeingültigen FO-Formeln herleiten kann. Insbesondere folgt daraus dann, dass das Problem

ALLGEMEINGÜLTIGKEITSPROBLEM DER LOGIK ERSTER STUFE
Eingabe: Eine FO[σ]-Formel φ
Frage: Gilt $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle zu φ passenden σ-Interpretationen $\mathcal{I}$?

semi-entscheidbar ist.

1.1 Beweiskalküle

Definition 1.1 (Ableitungsregel; Kalkül)**.**
Sei M eine beliebige Menge.

Ableitungsregel über M

(a) Eine **Ableitungsregel über** M hat die Form

$$\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Voraussetzungen

Konsequenz

Axiome

(b) Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die **Voraussetzungen** der Regel $\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$ und b als die **Konsequenz**.
Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als **Axiome**.

Kalkül

(c) Ein **Kalkül** über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M.

Definition 1.2 (Ableitbare Elemente)**.**
Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.

$\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbare Elemente

(a) Sei $V \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge von M. Die Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq M$ aller **aus** V **in** $\mathfrak{K}$ **ableitbaren Elemente** ist rekursiv wie folgt definiert:

(I) Für alle $b \in V$ ist $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(II) Für alle Axiome $\overline{\ b\ }$ in $\mathfrak{K}$ ist $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(III) Für alle Ableitungsregeln $\frac{\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}}{b}$ in $\mathfrak{K}$ gilt: Wenn $a_1, \ldots, a_n \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, so auch $b \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

$\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ ist also die bezüglich „$\subseteq$“ kleinste Teilmenge von M, die die Abschlusseigenschaften (I), (II) und (III) besitzt.

Die Menge V wird auch **Menge der Voraussetzungen** genannt. Voraussetzungen

(b) Die Menge $\text{abl}_{\mathfrak{K}} := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\emptyset)$ ist die Menge aller **in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente** $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$ In $\mathfrak{K}$ ableitbare Elemente

Kalküle sind also einfach eine andere Schreibweise für rekursive Definitionen.

Definition 1.3 (Ableitungen)**.**
Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine **Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$** ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt: Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$

- $a_i \in V$ oder
- $\overline{\;a_i\;}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}}{a_i}$, so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

(b) Eine **Ableitung von a in $\mathfrak{K}$** ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$. Ableitung von a in $\mathfrak{K}$

Beobachtung 1.4. Offensichtlich gilt:
a ist genau dann aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbar (gemäß Definition 1.2), wenn es eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ gibt (gemäß Definition 1.3).

1.2 Ein Sequenzenkalkül

In diesem Kapitel sei σ eine beliebige fest gewählte Signatur (im Sinne von Definition 0.1).

Notation 1.5.

- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \ldots$ bezeichnen immer σ-Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bezeichnen immer FO$[\sigma]$-Formeln.
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \ldots$ bezeichnen Mengen von FO$[\sigma]$-Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen **endliche** Mengen von FO$[\sigma]$-Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

  Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}\big(\Phi \cup \{\varphi\}\big)$.
- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine **endliche** Teilmenge von M ist. $L \subseteq_e M$

Definition 1.6 (Sequenzen)**.**

(a) Eine **Sequenz** ist ein Ausdruck der Form Sequenz $\Gamma \vdash \psi$

$$\Gamma \vdash \psi,$$

wobei $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \text{FO}[\sigma]$.

Wir bezeichnen Γ als das **Antezedens** und ψ als das **Sukzedens** der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$. Antezedens Sukzedens

M_S

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.:

$$M_S \ := \ \big\{ \Gamma \vdash \psi \ : \ \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma] \text{ und } \psi \in \mathrm{FO}[\sigma] \big\}.$$

Notation 1.7.

- Statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\Gamma, \varphi \vdash \psi$.
- Statt $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \psi$ schreiben wir auch $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$.

Die folgende Definition legt (auf die naheliegende Weise) fest, wann eine Formel ψ aus einer ganzen Menge Φ von Formeln folgt:

Definition 1.8.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

ψ folgt aus Φ
Φ impliziert ψ
$\Phi \models \psi$

ψ **folgt aus** Φ (bzw. Φ **impliziert** ψ), kurz $\Phi \models \psi$, wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$, die zu ψ und zu allen $\varphi \in \Phi$ passen, gilt: falls für alle $\varphi \in \Phi$ gilt $\mathcal{I} \models \Phi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation 1.9.
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I}$ eine σ-Interpretation.

$\mathcal{I}$ passt zu Φ

- Wir sagen $\mathcal{I}$ **passt zu** Φ, falls $\mathcal{I}$ zu jedem $\varphi \in \Phi$ passt.

$\mathcal{I} \models \Phi$
$\mathcal{I}$ erfüllt Φ

- $\mathcal{I} \models \Phi$ (in Worten: $\mathcal{I}$ erfüllt Φ) $:\iff$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Definition 1.10 (Korrekte Sequenzen und Sequenzenregeln)**.**

korrekt

(a) Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt **korrekt**, wenn gilt: $\Gamma \models \psi$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k\end{array}}{\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}}$$

heißt **korrekt**, wenn Folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \varphi_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ korrekt.

Sequenzenkalkül
$\mathfrak{K}_S$

Die folgende Definition führt einen Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen ein, den sogenannten **Sequenzenkalkül** $\mathfrak{K}_S$. Im Verlauf von Kapitel 1 werden wir sehen, dass Folgendes gilt:

(a) Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathfrak{K}_S$ besteht, sind korrekt. Daraus folgt dann, dass auch alle in $\mathfrak{K}_S$ ableitbaren Sequenzen korrekt sind.

(b) Ist $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \models \psi$, dann gibt es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Korrektheit
Vollständigkeit

Die Eigenschaften (a) und (b) werden **Korrektheit** bzw. **Vollständigkeit** des Kalküls $\mathfrak{K}_S$ genannt. Der Einfachheit halber werden wir nur Formeln betrachten, in denen keins der Symbole $\to$, $\leftrightarrow$ vorkommt.

Definition 1.11 (Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$)**.**
Der **Sequenzekalkül** $\mathfrak{K}_S$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der aus den folgenden Ableitungsregeln besteht — für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, $t, u \in T_\sigma$, $x, y \in \mathsf{VAR}$:

Grundregeln

- Voraussetzungsregel (V): (V)

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E): (E)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \quad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Aussagenlogische Regeln

- Fallunterscheidungsregel (FU): (FU)

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi\\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$$

- Widerspruchsregel (W): (W)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi\\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \quad (\text{für alle } \varphi \in \mathrm{FO}[\sigma])$$

- $\wedge$-Einführung im Antezedens ($\wedge$A$_1$), ($\wedge$A$_2$): ($\wedge$A$_1$) ($\wedge$A$_2$)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\psi \wedge \varphi) \vdash \chi}$$

- $\wedge$-Einführung im Sukzedens ($\wedge$S): ($\wedge$S)

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi\\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A): ($\vee$A)

$$\frac{\begin{array}{r}\Gamma, \varphi \vdash \chi\\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- $\vee$-Einführung im Sukzedens ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$): ($\vee$S$_1$) ($\vee$S$_2$)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\psi \vee \varphi)}$$

Quantorenregeln

- $\forall$-Einführung im Antezedens ($\forall$A): ($\forall$A)

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedens ($\forall$S): ($\forall$S)

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

(∃A)

- ∃-Einführung im Antezedens (∃A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \quad \text{, falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x\varphi, \psi)$$

(∃S)

- ∃-Einführung im Sukzedens (∃S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

Gleichheitsregeln

(G)

- Reflexivität der Gleichheit (G):

$$\frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

(S)

- Substitutionsregel (S):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

Im Folgenden geben wir zwei Beispiele für Ableitungen im Sequenzenkalkül an.

Beispiel 1.12.

(a) Für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ ist $\emptyset \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$ ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	φ	$\vdash$	φ	(V)
(2)	φ	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee S_1$) auf (1) angewendet
(3)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(4)	$\neg\varphi$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	($\vee S_2$) auf (3) angewendet
(5)	$\emptyset$	$\vdash$	$(\varphi \vee \neg\varphi)$	(FU) auf (2), (4) angewendet.

(b) $R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x) \;\vdash R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ ist ableitbar in $\mathfrak{K}_S$:

(1)	$R\big(f(x)\big)$	$\vdash$	$R\big(f(x)\big)$	(V)
(2)	$R\big(f(x)\big), x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	(S) auf (1) mit $t{=}x$, $u{=}f(x)$
(3)	$R\big(f(x)\big), \forall x\, x{=}f(x)$	$\vdash$	$R\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	(∀A) auf (2) mit $t{=}x$.

Der folgende Satz bestätigt Punkt (a) der auf Seite 30 beschriebenen Agenda:

Satz 1.13 (Korrekheit des Sequenzenkalküls)**.**
Alle Ableitungsregeln, aus denen $\mathfrak{K}_S$ besteht, sind korrekt; und jede in $\mathfrak{K}_S$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

Beweis:
Wir zeigen, dass jede Ableitungsregel von $\mathfrak{K}_S$ korrekt ist, d.h. es gilt: Wenn die Voraussetzungen der Regel korrekt sind, dann ist auch die Konsequenz korrekt. Die Korrektheit aller in $\mathfrak{K}_S$ ableitbaren Sequenzen folgt dann leicht per Induktion nach der Länge von Ableitungen.

(V): $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \ \vdash \varphi}$

Offensichtlich gilt: $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \varphi$. Daher ist die Sequenz $\Gamma, \varphi \ \vdash \varphi$ korrekt.

(G): $\dfrac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$

Offensichtlich ist die Formel $t{=}t$ allgemeingültig. Daher gilt für alle Γ, dass $\Gamma \models t{=}t$. Somit ist die Sequenz $G \models t{=}t$ korrekt.

(E): $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi}$ falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi$. Sei $\Gamma \subseteq \Gamma'$

Zu zeigen: $\Gamma' \models \varphi$.

Beweis:
Sei $\mathcal{I}$ eine zu Γ' und φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma'$. Wegen $\Gamma \subseteq \Gamma'$ gilt dann auch: $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $\Gamma \models \varphi$ folgt dass $\mathcal{I} \models \varphi$. Somit gilt: $\Gamma' \models \varphi$, d.h. $\Gamma' \vdash \varphi$ ist korrekt.

(FU): $\dfrac{\begin{array}{r}\Gamma, \psi \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$

Annahme: $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ ist korrekt und $\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

Beweis:
Laut Annahme gilt $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ und $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$.
Sei $\mathcal{I}$ eine zu $\Gamma \cup \{\psi\} \cup \{\varphi\}$ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.

<u>Fall 1</u>: $\mathcal{I} \models \psi$:

Dann gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\psi\}$. Wegen $\Gamma \cup \{\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

<u>Fall 2</u>: $\mathcal{I} \models \neg\psi$:

Dann gilt: $\mathcal{I} \models \Gamma \cup \{\neg\psi\}$. Wegen $\Gamma \cup \{\neg\psi\} \models \varphi$ gilt daher: $\mathcal{I} \models \varphi$.

Somit gilt: $\Gamma \models \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ist korrekt.

(W): $\dfrac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi}$ (für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$)

Annahme: $\Gamma \vdash \psi$ ist korrekt und $\Gamma \vdash \neg\psi$ ist korrekt.

Zu zeigen: Für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ist $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt.

Beweis:
Wir zeigen, dass es keine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ geben kann, die Γ erfüllt. Daraus folgt dann unmittelbar, das $\Gamma \models \varphi$, d.h. dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ korrekt ist.

Angenommen, $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ ist eine zu Γ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$.
Offensichtlicherweise kann der Definitionsbereich von β so erweitert werden, dass $\mathcal{I}$ auch zur Formel ψ passt.
Laut Annahme gilt $\Gamma \vdash \psi$ und $\Gamma \vdash \neg\psi$. Wegen $\mathcal{I} \models \Gamma$ muss daher sowohl $\mathcal{I} \models \psi$, als auch $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gelten. Dies ist aber nicht möglich! $\lightning$

$(\wedge A_1)$: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$

Annahme: $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ ist korrekt.

Zu zeigen: $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi$ ist korrekt.

Beweis: Offensichtlich!

$(\wedge A_2)$, $(\wedge S)$, $(\vee A)$, $(\vee S_1)$, $(\vee S_2)$, $(\forall A)$, $(\exists S)$, (S): ähnlich leicht!

$(\forall S)$: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\, \varphi)$

Beweis:

Annahme: $\Gamma \vdash \varphi\frac{y}{x}$ ist korrekt, d.h. $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$.

Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\, \varphi)$.

Zu zeigen: $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ ist korrekt.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Wegen $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt laut Koinzidenzlemma für alle $a \in A$: $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$.
Gemäß Annahme gilt: $\Gamma \models \varphi\frac{y}{x}$. Somit gilt für alle $a \in A$, dass $\mathcal{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$.
D.h. es gilt: $\mathcal{I} \models \forall y\, \varphi\frac{y}{x}$.
Wegen $y \notin \text{frei}(\forall x\, \varphi) = \text{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$ gilt gemäß Substitutionslemma, dass $\mathcal{I} \models \forall x\, \varphi$.
Somit gilt: $\Gamma \models \forall x\, \varphi$, d.h. die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi$ ist korrekt.

$(\exists A)$: $\dfrac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\, \varphi \vdash \psi}$, falls $y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$

Beweis: Analog; Details: Übung.

Dies schließt den Beweis von Satz 1.13 ab.

$\square$Satz 1.13

Wir betrachten den Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ als „formales Beweissystem", mit dem man mechanisch den Nachweis erbringen kann, dass für eine Formelmenge Φ und eine Formel φ gilt: $\Phi \models \varphi$. Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Definition 1.14 (Beweisbarkeit)**.**
beweisbar
$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$
Beweis
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$. Die Formel φ ist **beweisbar** aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge Γ von Φ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Ein **Beweis** von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ für ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$.

Aus Satz 1.13 folgt direkt:

Korollar 1.15.
Für alle $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$, so $\Phi \models \varphi$.
D.h.: Falls φ aus Φ beweisbar ist, so folgt φ semantisch aus Φ.

Unser Ziel im Rest von Kapitel 1 ist, zu zeigen, dass auch die Umkehrung von Korollar 1.15 gilt, d.h.: Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi.$$

Dies ist die Aussage des **Vollständigkeitssatz**es. Man beachte, dass die Richtung „$\Longleftarrow$“ gerade Punkt (b) der auf Seite 30 beschriebenen Agenda darstellt. Vollständigkeitssatz

1.3 Ableitbare Regeln im Sequenzenkalkül

Definition 1.16.
Sei $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{k+1} \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathrm{FO}[\sigma]$. Eine Sequenzenregel

$$\begin{array}{c} \Gamma_1 \vdash \varphi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_k \vdash \varphi_k \\ \hline \Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1} \end{array}$$

heißt **ableitbar (in $\mathfrak{K}_S$)**, wenn $\Gamma_{k+1} \vdash \varphi_{k+1}$ aus der Menge $V := \big\{\Gamma_i \vdash \varphi_i \ : \ i \in \{1, \dots, k\}\big\}$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist. ableitbar (in $\mathfrak{K}_S$)

Lemma 1.17.
Sei $\mathfrak{K}_S{}'$ eine Erweiterung des Sequenzenkalküls $\mathfrak{K}_S$ um eine oder mehrere ableitbare Sequenzenregeln. Dann ist eine Sequenz S genau dann in $\mathfrak{K}_S{}'$ ableitbar, wenn sie in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Beweis: Übung (vgl. Aufgabe 1.1).

□

Im Folgenden wird eine Liste von ableitbaren Sequenzenregeln zusammengestellt, die für den Beweis des Vollständigkeitssatzes sehr nützlich sein werden.

Lemma 1.18 (Ableitbare aussagenlogische Sequenzenregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar — für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$:

- *Kettenschlussregel (KS):* Kettenschlussregel (KS)

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi \\ \hline \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

- *Disjunktiver Syllogismus (DS):* Disjunktiver Syllogismus (DS)

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \neg\varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \lor \psi) \\ \hline \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

- *Modus Ponens[1] (MP):* Modus Ponens (MP)

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \\ \hline \Gamma \vdash \psi \end{array}$$

- *Kontrapositionsregeln (KP):* Kontrapositionsregeln (KP)

[1]Wir betrachten hier $(\varphi \to \psi)$ als “abkürzende Schreibweise” für die Formel $(\neg\varphi \lor \psi)$.

- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \neg\varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \neg\varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi}{\Gamma, \neg\psi \vdash \varphi}$$

- $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma, \psi \vdash \varphi}$$

Beweis:

(KS):

(1)	Γ	$\vdash$	φ	(Voraussetzung)
(2)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(E) auf (1)
(4)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(5)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ	$\vdash$	ψ	(FU) auf (2), (5)

(DS):

(1)	Γ	$\vdash$	$(\varphi \vee \psi)$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$\neg\varphi$	(Voraussetzung)
(3)	Γ, φ	$\vdash$	$\neg\varphi$	(E) auf (2)
(4)	Γ, φ	$\vdash$	φ	(V)
(5)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ, ψ	$\vdash$	ψ	(V)
(7)	$\Gamma, (\varphi \vee \psi)$	$\vdash$	ψ	($\vee$A) auf (5), (6)
(8)	Γ	$\vdash$	ψ	(KS) auf (1), (7)

(MP):

(1)	Γ	$\vdash$	$(\neg\varphi \vee \psi)$	(Voraussetzung) **Beachte:** $(\varphi \rightarrow \psi)$ ist eine Abkürzung für $(\neg\varphi \vee \psi)$
(2)	Γ	$\vdash$	φ	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(E) auf (2)
(4)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(5)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	ψ	(W) auf (3), (4)
(6)	Γ, ψ	$\vdash$	ψ	(V)
(7)	$\Gamma, (\neg\varphi \vee \psi)$	$\vdash$	ψ	($\vee$A) auf (5), (6)
(8)	Γ	$\vdash$	ψ	(KS) auf (1), (7)

(KP):

(1)	Γ, φ	$\vdash$	ψ	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash$	ψ	(E) auf (1)
(3)	$\Gamma, \neg\psi$	$\vdash$	$\neg\psi$	(V)
(4)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash$	$\neg\psi$	(E) auf (3)
(5)	$\Gamma, \neg\psi, \varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(W) auf (2), (4)
(6)	$\Gamma, \neg\psi, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(V)
(7)	$\Gamma, \neg\psi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	(FU) auf (5),(6)

Die anderen Kontrapositionsregeln können analog abgeleitet werden.

$\square$

Lemma 1.19 (Ableitbare Quantorenregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar — für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$*, alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *und alle* $x \in \mathsf{VAR}$.

Quantorenaustauschregeln (QA): (QA)

$$1)\quad \frac{\Gamma \vdash \neg\forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\ \neg\varphi}$$

$$2)\quad \frac{\Gamma \vdash \exists x\ \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\forall x\ \varphi}$$

$$3)\quad \frac{\Gamma \vdash \neg\exists x\ \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\ \neg\varphi}$$

$$4)\quad \frac{\Gamma \vdash \forall x\ \neg\varphi}{\Gamma \vdash \neg\exists x\ \varphi}$$

Beweis:

Zu 1):

(1)	Γ	$\vdash$	$\neg\forall x\ \varphi$	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x}$	$\vdash$	$\neg\varphi\frac{y}{x}$	(V) ; sei $y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$
(3)	$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x}$	$\vdash$	$\exists x\ \neg\varphi$	($\exists$S) auf (2) mit $t{=}y$
(4)	$\Gamma, \neg\exists x\ \neg\varphi$	$\vdash$	$\varphi\frac{y}{x}$	(KP) auf (3)
(5)	$\Gamma, \neg\exists x\ \neg\varphi$	$\vdash$	$\forall x\ \varphi$	($\forall$S) auf (4)
(6)	$\Gamma, \neg\forall x\ \varphi$	$\vdash$	$\exists x\ \neg\varphi$	(KP) auf (5)
(7)	Γ	$\vdash$	$\exists x\ \neg\varphi$	(KS) auf (1),(6)

Zu 2):

(1)	Γ	$\vdash$	$\exists x\, \neg\varphi$	(Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \varphi\frac{y}{x}$	$\vdash$	$\varphi\frac{y}{x}$	(V) ; sei $y \notin \text{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$
(3)	$\Gamma, \forall x\varphi$	$\vdash$	$\varphi\frac{y}{x}$	$(\forall\text{A})$
(4)	$\Gamma, \neg\varphi\frac{y}{x}$	$\vdash$	$\neg\forall x\, \varphi$	(KP) auf (3)
(5)	$\Gamma, \exists x\, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\forall x\, \varphi$	$(\exists\text{A})$ auf (4)
(6)	Γ	$\vdash$	$\neg\forall x\, \varphi$	(KS) auf (1),(5)

Zu 3) und 4): analog.

$\square$

Lemma 1.20 (Ableitbare Gleichheitsregeln)**.**
Folgende Sequenzenregeln sind ableitbar (für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$, für alle $t, u, t_1, u_1, t_2, u_2, \dots \in T_\sigma$):

(SG)
- *Symmetrie der Gleichheit (SG):*

$$\frac{\Gamma \vdash t = u}{\Gamma \vdash u = t}$$

(TG)
- *Transitivität der Gleichheit (TG):*

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = t_2\\ \Gamma \vdash t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma \vdash t_1 = t_3}$$

(VR)
- *Verträglichkeitsregeln für die Gleichheit:*

  (VR): Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $r := \text{ar}(R)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash R(t_1, \dots, t_r)\\ \Gamma \vdash t_1 = u_1\\ \quad\vdots\\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash R(u_1, \dots, u_r)}$$

(VF)

  (VF): Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$ und für $r := \text{ar}(f)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash t_1 = u_1\\ \quad\vdots\\ \Gamma \vdash t_r = u_r\end{array}}{\Gamma \vdash f(t_1, \dots, t_r) = f(u_1, \dots, u_r)}$$

Beweis:

- (SG):

(1)	Γ	$\vdash$	$t = u$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t = t$	(G)
(3)	$\Gamma, t = u$	$\vdash$	$u = t$	(S) auf (2) mit $\varphi :=\ x = t$
(4)	Γ	$\vdash$	$u = t$	(KS) auf (1),(3)

- (TG):

(1)	Γ	$\vdash$	$t_1 = t_2$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_2 = t_3$	(Voraussetzung)
(3)	$\Gamma, t_2 = t_3$	$\vdash$	$t_1 = t_3$	(S) auf (1) mit $\varphi :=\ t_1 = x$, $t := t_2$, $u := t_3$
(4)	Γ	$\vdash$	$t_1 = t_3$	(KS) auf (2),(3)

- (VR): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog).

(1)	Γ	$\vdash$	$R(t_1, t_2)$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_1 = u_1$	(Voraussetzung)
(3)	Γ	$\vdash$	$t_2 = u_2$	(Voraussetzung)
(4)	$\Gamma, t_1 = u_1$	$\vdash$	$R(u_1, t_2)$	(S) auf (1) mit $\varphi := R(x, t_2)$, $t := t_1$, $u := u_1$
(5)	Γ	$\vdash$	$R(u_1, t_2)$	(KS) auf (2), (4)
(6)	$\Gamma, t_2 = u_2$	$\vdash$	$R(u_1, u_2)$	(S) auf (5) mit $\varphi := R(u_1, x)$, $t := t_2$, $u := u_2$
(7)	Γ	$\vdash$	$R(u_1, u_2)$	(KS) auf (3),(6)

- (VF): Beweis für $r = 2$ (für andere r: analog).

(1)	Γ	$\vdash$	$t_1 = u_1$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$t_2 = u_2$	(Voraussetzung)
(3)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2)$	(G)
(4)	$\Gamma, t_1 = u_1$	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$	(S) auf (3) mit $\varphi :=\ f(t_1, t_2) = f(x, t_2)$
(5)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, t_2)$	(KS) auf (1), (4)
(6)	$\Gamma, t_2 = u_2$	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$	(S) auf (5) mit $\varphi :=\ f(t_1, t_2) = f(u_1, x)$
(7)	Γ	$\vdash$	$f(t_1, t_2) = f(u_1, u_2)$	(KS) auf (2), (6)

Dies schließt den Beweis von Lemma 1.20 ab.

□

1.4 Widerspruchsfreiheit und das syntaktische Endlichkeitslemma

Definition 1.21 (Widerspruchsfreiheit)**.** Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **widerspruchsvoll**, falls es ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$ D.h.: Φ ist widerspruchsvoll, falls sich im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ein Widerspruch herleiten lässt. widerspruchsvoll

(b) Φ heißt **widerspruchsfrei**, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist. widerspruchsfrei

Definition 1.22 (Erfüllbarkeit)**.**
Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ heißt **erfüllbar**, falls es eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$ gibt. erfüllbar

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls (Korollar 1.15) folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 1.23.
Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls Φ erfüllbar ist, so ist Φ widerspruchsfrei.

Beweis:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine zu Φ passende σ-Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$.
Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll. Dann gibt es gemäß Definition 1.21 ein $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Aus Korollar 1.15 folgt, dass $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$.

Natürlich können wir den Definitionsbereich von β so erweitern, dass $\mathcal{I}$ zu φ passt. Wegen $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$ gilt dann: $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. $\lightning$

$\square$

Im Rest von Kapitel 1.2 werden wir den Vollständigkeitssatz (d.h., die Aussage "$\Phi \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$") dadurch beweisen, dass wir

1) Zeigen, dass jede widerspruchsfreie Formelmenge Φ erfüllbar ist (dies ist die Aussage des so gennanten **Erfüllbarkeitslemmas**, Lemma 1.28) und

2) zeigen, dass aus dem Erfüllbarkeitslemma folgt, dass für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Falls $\Phi \models \varphi$, so $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Dazu werden wir die im Folgenden zusammgenstellten Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen benutzen.

Lemma 1.24. *Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:*

(a) Φ *ist widerspruchsvoll* $\iff$ *für alle* $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt* $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *es gibt ein*[2] $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, *so dass* $\Phi \nvdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

(c) Φ *ist widerspruchsvoll* $\iff$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$.

Beweis:

(a) „$\Longleftarrow$“ :
Gemäß Voraussetzung gilt für jedes beliebige $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Insbesondere ist Φ daher widerspruchsvoll.

„$\Longrightarrow$“ :
Gemäß Voraussetzung ist Φ widerspruchsvoll, d.h. es gibt ein $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\psi$. Gemäß Definition 1.14 gibt es dann $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenzen $\Gamma_1 \vdash \psi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\psi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar sind.
Dann ist für jede beliebige $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ auch Folgendes in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ_1	$\vdash$	ψ	
(2)	Γ_2	$\vdash$	$\neg\psi$	
(3)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	ψ	(E) auf (1)
(4)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	$\neg\psi$	(E) auf (2)
(5)	$\Gamma_1 \cup \Gamma_2$	$\vdash$	φ	(W) auf (3), (4)

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ für jedes beliebige $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

[2]Notation: Wir schreiben $\Phi \nvdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$, um auszudrücken, dass nicht $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ gilt.

(b) Folgt direkt aus (a).

(c) „$\Longrightarrow$“ :
Folgt direkt aus (a).

„$\Longleftarrow$“ :
Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. D.h. es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Sei φ eine beliebige FO$[\sigma]$-Formel. Wir zeigen im Folgenden, dass auch die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist. Daraus folgt direkt, dass für jedes $\varphi \in$ FO$[\sigma]$ gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Gemäß (a) ist Φ daher widerspruchsvoll.

Gemäß Voraussetzung ist $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar. Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ erhalten wir wie folgt:

(1)	Γ	$\vdash$	$\exists v_0\, \neg v_0 = v_0$	(Voraussetzung)
(2)	Γ	$\vdash$	$\neg\forall v_0\, v_0 = v_0$	(QA) siehe Lemma 1.19
(3)	$\emptyset$	$\vdash$	$v_0 = v_0$	(G)
(4)	$\emptyset$	$\vdash$	$\forall v_0\, v_0 = v_0$	($\forall$S) auf (3)
(5)	Γ	$\vdash$	$\forall v_0\, v_0 = v_0$	(E) auf (4)
(6)	Γ	$\vdash$	φ	(W) auf (5), (2).

Somit gilt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ für jedes $\varphi \in$ FO$[\sigma]$. Daher ist Φ widerspruchsvoll. $\square$

Lemma 1.25.
Für alle $\Phi \subseteq$ FO$[\sigma]$ und alle $\varphi \in$ FO$[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsvoll.

(b) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi \iff \Phi \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsvoll.

(c) Falls Φ widerspruchsfrei ist, so ist auch mindestens eine der beiden Mengen $\Phi \cup \{\varphi\}$ und $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei.

Beweis:

(a) „$\Longrightarrow$“ : Sei $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.
Gemäß der Regel (E) von $\mathfrak{K}_S$ gilt auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Außerdem gilt natürlich gemäß der Regel (V) in $\mathfrak{K}_S$, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Somit ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.

„$\Longleftarrow$“ : Sei $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsvoll.
Wegen Lemma 1.24 (a) gilt dann $\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma, \neg\varphi \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.
Eine Ableitung von $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ erhalten wir dann wie folgt:

(1)	$\Gamma, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	(gemäß Voraussetzung)
(2)	Γ, φ	$\vdash$	φ	(V)
(3)	Γ	$\vdash$	φ	(FU) auf (1), (2).

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$. $\square_{(a)}$

(b) Analog zu (a).

(c) Angenommen, sowohl $\Phi \cup \{\varphi\}$ als auch $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ wäre widerspruchsvoll.
Aus (a) und (b) folgt dann: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$. Somit ist Φ widerspruchsvoll, also **nicht** widerspruchs**frei**. □

Dies beendet die Auflistung der Eigenschaften widerspruchsfreier bzw. widerspruchsvoller Formelmengen.
Das folgende — sehr einfache — Lemma wird später, beim Beweis des Vollständigkeitssatzes sowie auch beim Beweis des Endlichkeitssatzes (siehe nächstes Kapitel) sehr nützlich sein.

Lemma 1.26 (Das syntaktische Endlichkeitslemma)**.**
Für jedes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt: Φ ist widerspruchsfrei $\iff$ jedes $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsfrei.

Beweis: „$\Longrightarrow$" : Angenommen, $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 1.24 (c) gilt dann $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Wegen Regel (E) von $\mathfrak{K}_S$ gilt dann auch $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 1.24 (c) ist Φ somit widerspruchsvoll. $\lightning$

„$\Longleftarrow$" : Angenommen, Φ wäre widerspruchsvoll.
Lemma 1.24 (c) ergibt $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$. Gemäß Definition 1.21 gibt es daher ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass $\Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0 = v_0$. Lemma 1.24 (c) ergibt wiederum, dass Γ widerspruchsvoll ist. $\lightning$

□

1.5 Der Vollständigkeitssatz

Satz 1.27 (Der Vollständigkeitssatz)**.**
Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

(a) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$

(b) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Das folgende Lemma liefert den Schlüssel für den Beweis des Vollständigkeitssatzes.

Lemma 1.28 (Erfüllbarkeitslemma)**.**
Für alle Signaturen σ gilt: Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Bevor wir Lemma 1.28 beweisen, zeigen wir zunächst, wie es genutzt werden kann, um den Vollständigkeitssatz zu beweisen.

Beweis von Satz 1.27 (Vollständigkeitssatz):

(b) „$\Longrightarrow$" : Dies ist gerade die Aussage des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 1.28).

„$\Longleftarrow$" : Korollar 1.23 (einfache Folgerung aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls).

(a) „$\Longrightarrow$" : Korollar 1.15 (Korrektheit des Sequenzenkalküls).

„$\Longleftarrow$" : Es gelte $\Phi \models \varphi$. Angenommen, $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.
Aus Lemma 1.24(a) folgt dann, dass $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei und gemäß Erfüllbarkeitslemma also auch erfüllbar ist. Das heißt, es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$. Somit gilt $\mathcal{I} \models \Phi$ und $\mathcal{I} \models \neg\varphi$. Laut Voraussetzung gilt aber $\Phi \models \varphi$ und daher gilt $\mathcal{I} \models \varphi$. $\lightning$

□

Der Rest von Kapitel 1 ist dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas (Lemma 1.28) gewidmet. Dazu sei σ eine beliebige Signatur, und Φ sei im Folgenden eine fest gewählte widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. **Ziel:** Konstruiere eine zu Φ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$.

Definition 1.29 (Termstruktur $\mathcal{A}_\Phi$ und Terminterpretation $\mathcal{I}_\Phi$)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) Die σ-Struktur $\mathcal{A}_\Phi$ ist folgendermaßen definiert $\mathcal{A}_\Phi$

- $\mathcal{A}_\Phi \ := \ T_\sigma$ (d.h.: das Universum von $\mathcal{A}_\Phi$ besteht aus der Menge aller σ-Terme).
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{\mathcal{A}_\Phi} := c$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \dots, t_k) \ := \ f(t_1, \dots, t_k).$$

- Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ ist

$$R^{\mathcal{A}_\Phi} \ := \ \big\{(t_1, \dots, t_k) \in T_\sigma^k : \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \dots, t_k)\big\}.$$

Die Struktur $\mathcal{A}_\Phi$ heißt **Termstruktur** von Φ. Termstruktur

(b) Die Belegung $\beta_\Phi\colon \mathsf{VAR} \to A_\Phi$ ist definiert durch β_Φ

$$\beta(x) \ := \ x, \ \text{für alle } x \in \mathsf{VAR}.$$

(c) Die σ-Interpretation $\mathcal{I}_\Phi := (\mathcal{A}_\Phi, \beta_\Phi)$ heißt **Terminterpretation** von Φ. $\mathcal{I}_\Phi$ Terminterpretation

Beobachtung 1.30.

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = t$.

(b) Für alle $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ gilt:

$$\mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \dots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \dots, t_k).$$

Beweis: (a) folgt leicht per Induktion nach dem Aufbau von T_σ.
(b) lässt sich wie folgt beweisen:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\Phi \models R(t_1, \dots, t_k) \ &\overset{\text{Semantik von FO}[\sigma]}{\iff} \ \big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}\big) \in R^{\mathcal{A}_\Phi} \\ &\overset{(a)}{\iff} \ (t_1, \dots, t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi} \\ &\overset{\text{Def. 1.29}}{\iff} \ \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \dots, t_k). \end{aligned}$$

□

Beobachtung 1.31.
Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt $\mathcal{I}_\Phi \ \not\models \ t_1 = t_2$.
Somit gilt: Falls es Terme t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t_1 = t_2$, so ist $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$.
Ziel: Modifiziere $\mathcal{I}_\Phi$ so zu einer σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$, dass für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

$\sim_\Phi$

Definition 1.32 (Kongruenzrelation $\sim$ auf T_σ)**.** Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die zweistellige Relation $\sim_\Phi$ auf T_σ sei folgendermaßen definiert. Für alle $t, u \in T_\sigma$ gilt:

$$t \sim_\Phi u \quad :\iff \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} t = u.$$

Lemma 1.33. *Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.*

(a) Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine ***Äquivalenzrelation*** *auf T_σ.*

(b) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1, \ldots, t_k \sim_\Phi u_k$:

$$f(t_1, \ldots, t_k) \;\sim_\Phi\; f(u_1, \ldots, u_k).$$

(c) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $t_1 \sim_\Phi u_1, \ldots, t_k \sim_\Phi u_k$ gilt:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k) \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(u_1, \ldots, u_k).$$

Beweis:

(a) Folgt mit (G), (SG), (TG).

(b) Folgt mit (VF).

(c) Folgt mit (VR). □

Als unmittelbare Folgerung aus Lemma 1.33 erhalten wir:

Kongruenzrelation

Korollar 1.34. *Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$. Die Relation $\sim_\Phi$ ist eine* ***Kongruenzrelation*** *auf $\mathcal{A}_\Phi$, das heißt es gilt:*

(a) $\sim_\Phi$ ist eine Äquivalenzrelation auf A_Φ.

(b) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:

$$f^{\mathcal{A}_\Phi}(a_1, \ldots, a_k) \;\sim_\Phi\; f^{\mathcal{A}_\Phi}(b_1, \ldots, b_k).$$

(c) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A_\Phi$ mit $a_1 \sim_\Phi b_1, \ldots, a_k \sim_\Phi b_k$ gilt:

$$\mathcal{A}_\Phi \models R(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathcal{A}_\Phi \models R(b_1, \ldots, b_k).$$

Wir betrachten nun die σ-Struktur, die man aus $\mathcal{A}_\Phi$ erhält, indem man alle bezüglich $\sim_\Phi$ äquivalenten Elemente in A_Φ miteinander identifiziert.

Definition 1.35 (Die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$, die reduzierte Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Phi]$)**.** Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$.

$[t]_\Phi$

(a) Für jedes $t \in T_\sigma$ sei

$$[t]_\Phi \;:=\; \{u \in T_\sigma : t \sim_\Phi u\}$$

die **Äquivalenzklasse** von t bezüglich $\sim_\Phi$ in T_σ.

(b) Die σ-Struktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ sei folgendermaßen definiert

$[\mathcal{A}_\Phi]$ reduzierte Termstruktur

(I) Das Universum von $[\mathcal{A}_\Phi]$ ist die Menge

$$[A_\Phi] \ := \ \{ \ [t]_\Phi \ : \ t \in T_\sigma \ \}$$

(das heißt: $[A_\Phi]$ besteht aus allen Äquivalenzklassen von σ-Termen).

(II) Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $c^{[\mathcal{A}_\Phi]} := [c]_\Phi$.

(III) Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ und für $k := \text{ar}(R)$ ist

$$R^{[\mathcal{A}_\Phi]} \ := \Big\{ \big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi \big) : (t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{A}_\Phi}) \Big\}.$$

(IV) Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$ und für alle $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ ist

$$f^{[\mathcal{A}_\Phi]}\Big([t_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi \Big) \ := \ \big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k) \big]_\Phi.$$

Beachte: Dies ist **wohldefiniert**, da gemäß Korollar 1.34 (b) für alle $t_1, \ldots, t_k, u_1, \ldots, u_k \in T_\sigma$ mit $[t_1]_\Phi = [u_1]_\Phi, \ldots, [t_k]_\Phi = [u_k]_\Phi$ gilt:

$$\big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(t_1, \ldots, t_k) \big]_\Phi \ = \ \big[f^{\mathcal{A}_\Phi}(u_1, \ldots, u_k) \big]_\Phi.$$

Die σ-Struktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ heißt **reduzierte Termstruktur** von Φ.

(c) Die Belegung $[\beta_\Phi]$: $\mathsf{VAR} \to [A_\Phi]$ ist für alle $x \in \mathsf{VAR}$ definiert durch

$[\beta_\Phi]$

$$[\beta_\Phi](x) \ := \ \big[\beta_\Phi(x) \big]_\Phi \ = \ [x]_\Phi.$$

(d) Die σ-Interpretation $[\mathcal{I}_\Phi] := \big([\mathcal{A}_\Phi], [\beta_\Phi] \big)$ heißt **reduzierte Terminterpretation** von Φ.

$[\mathcal{I}_\Phi]$ reduzierte Terminterpretation

Lemma 1.36.

(a) Für alle $t \in T_\sigma$ gilt: $\quad [\![t]\!]^{[\mathcal{I}_\Phi]} \ = \ [t]_\Phi$.

*(b) Für alle **atomaren** FO[σ]-Formeln φ gilt:* $\quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Beweis:
Einfaches Nachrechnen; Details: Übung. $\square$

Eigentlich würden wir gern zeigen, dass Teil (b) von Lemma 1.36 nicht nur für **atomare** Formeln, sondern für **alle** Formeln $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt — dann wären wir auch mit dem Beweis des Erfüllbarkeitslemmas fertig, da für alle $\varphi \in \Phi$ natürlich $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ gilt. Leider lässt sich Teil (b) von Lemma 1.36 nur dann auf **alle** FO[σ]-Formeln verallgemeinern, wenn die Menge Φ die folgenden Eigenschaften hat:

Definition 1.37. Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt **negationstreu**, wenn für alle $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$ gilt:

negationstreu

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi.$$

enthält Beispiele

(b) Φ **enthält Beispiele**, wenn für alle FO[σ]-Formeln der Form $\exists x\,\varphi$ (mit $x \in \text{Var}$ und $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$) gilt: Es gibt einen Term $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \;\vdash_{\mathfrak{K}_S}\; \left(\exists x\,\varphi \;\to\; \varphi\tfrac{t}{x}\right).$$

Der folgende Satz besagt, dass das Erfüllbarkeitslemma für alle widerspruchsfreien Formelmengen Φ gilt, die **negationstreu** sind und **Beispiele enthalten**.

Satz von Henkin

Satz 1.38 (Der Satz von Henkin)**.** *Sei σ eine Signatur.*
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält. Dann gilt für jedes $\varphi \in \text{FO}[\sigma]$:

$$[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi.$$

Beachte: *Daraus folgt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \Phi$.*

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von FO[σ].

Zur Erinnerung: In diesem Kapitel fassen wir die Junktoren „$\to$“ und „$\leftrightarrow$“ als Abkürzungen für die entsprechenden Kombinationen aus $\wedge, \vee, \neg$ auf. Daher betrachten wir „$\to$“ und „$\leftrightarrow$“ in diesem Beweis nicht.

Induktionsanfang: φ atomar.
Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 1.36 (b).

Induktionsschritt: Wir betrachten folgende Fälle:

- $\varphi = \neg\varphi_1$:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{I}_\Phi] \models \neg\varphi_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad [\mathcal{I}_\Phi] \not\models \varphi_1 \\
&\underset{\text{Ind.annahme}}{\Longleftrightarrow} \quad \Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \\
&\underset{\Phi \text{ negationstreu u. wid.frei}}{\Longleftrightarrow} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1
\end{aligned}$$

- $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{I}_\Phi] \models (\varphi_1 \vee \varphi_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \quad \text{oder} \quad [\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_2 \\
&\underset{\text{Ind.annahme}}{\Longleftrightarrow} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\varphi_1 \vee \varphi_2)
\end{aligned}$$

  Die letzte Äquivalenz ergibt sich wie folgt:
  „$\Longrightarrow$“ : Folgt unmittelbar aus der Sequenzenregel ($\vee$S).
  „$\Longleftarrow$“ : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$. Falls $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1$, so gilt wegen der Negationstreue, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1$. Aus $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ folgt mit der Regel (DS) („Disjunktiver Syllogismus“, siehe Lemma 1.17), dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_2$.

- $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$: Übung!

- $\varphi = \exists x\,\varphi_1$:
  „$\Longrightarrow$“ : Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x\,\varphi_1$.
  Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gibt es also ein $t \in T_\sigma$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]_\Phi}{x} \models \varphi_1$. Aus dem

Substitutionslemma (Lemma 0.42) und wegen $[t]_\Phi = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi}$ folgt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$.
Gemäß Induktionsannahme gilt dann: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \frac{t}{x}$.
Wegen der Sequenzenregel ($\exists$S) folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\, \varphi_1$.

„$\Longleftarrow$" : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\, \varphi_1$.
Nach Voraussetzung enthält Φ Beispiele, das heißt es gibt ein $t \in T_\sigma$, so dass

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\exists x\ \varphi_1\ \rightarrow\ \varphi_1 \tfrac{t}{x}).$$

Somit gilt: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\, \varphi_1$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\exists x\ \varphi_1\ \rightarrow\ \varphi_1 \frac{t}{x})$. Die ableitbare Sequenzenregel (MP) („Modus Ponens", siehe Lemma 1.17) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \frac{t}{x}$. Gemäß Induktionsannahme folgt, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$. Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]_\Phi$ liefern, dass

$$[\mathcal{I}_\Phi]\tfrac{[t]_\Phi}{x} \models \varphi_1.$$

Somit gilt $[\mathcal{I}_\Phi] \models \exists x\ \varphi_1$.

- $\varphi = \forall x\ \varphi_1$:

  „$\Longrightarrow$" : Es gelte $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x\, \varphi_1$.
  Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gilt also **für alle** $t \in T_\sigma$, dass $[\mathcal{I}_\Phi]\frac{[t]}{x} \models \varphi_1$.
  Substitutionslemma und $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_\Phi} = [t]_\Phi$ liefern, dass $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$.
  Gemäß Induktionsannahme folgt, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \frac{t}{x}$. Somit gilt **für jedes** $t \in T_\sigma$, dass

  $$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \tfrac{t}{x}. \qquad\qquad (*)$$

  Angenommen, $\Phi \not\vdash_{\mathfrak{K}_S} \forall x\, \varphi_1$. Die Negationstreue von Φ liefert dann, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\forall x\, \varphi_1$. Die Quantorenaustauschregel (QA) (siehe Lemma 1.19) liefert dann, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists x\ \neg\varphi_1$. Da Φ Beispiele enthält, gibt es einen Term $u \in T_\sigma$, so dass

  $$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} (\exists x\, \neg\varphi_1\ \rightarrow\ \neg\varphi_1 \tfrac{u}{x}).$$

  Die Modus Ponens Regel (MP) liefert, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_1 \frac{u}{x}$. Aber $(*)$ liefert auch, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \frac{u}{x}$. Dies steht im Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit von Φ.

  „$\Longleftarrow$" : Es gelte $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \forall x\, \varphi_1$.
  Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \forall x\, \varphi_1$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist. Für jedes beliebige $t \in T_\sigma$ sind folgende Sequenzen in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ	$\vdash$	$\forall x\ \varphi_1$	(gemäß Voraussetzung)
(2)	$\Gamma, \varphi_1 \frac{t}{x}$	$\vdash$	$\varphi_1 \frac{t}{x}$	(V)
(3)	$\Gamma, \forall x\ \varphi_1$	$\vdash$	$\varphi_1 \frac{t}{x}$	($\forall$A) auf (2)
(4)	Γ	$\vdash$	$\varphi_1 \frac{t}{x}$	(KS) auf (1), (3)

  Somit gilt für jedes $t \in T_\sigma$, dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_1 \frac{t}{x}$. Die Induktionsannahme liefert, dass für jedes $t \in T_\sigma$ gilt: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \varphi_1 \frac{t}{x}$. Gemäß der Definition von $[\mathcal{I}_\Phi]$ gilt also: $[\mathcal{I}_\Phi] \models \forall x\, \varphi_1$.
  Dies schließt den Beweis des Satzes von Henkin ab. □

Im Folgenden werden wir versuchen, eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ zu einer Menge $\Theta \supseteq \Phi$ zu erweitern, die widerspruchsfrei und negationstreu ist und Beispiele enthält.
Um dies zu erreichen, werden wir Signaturen σ betrachten, die höchstens abzählbar groß sind. Wir gehen in zwei Schritten vor, die in den beiden folgenden Lemmas durchgeführt werden.

Lemma 1.39.
*Sei σ eine **abzählbare** Signatur, und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge bei der*

$$\textit{die Menge } \ \mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi) \ \ \textit{unendlich ist.} \tag{1.1}$$

Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ Beispiele enthält.

Bemerkung: Die Voraussetzung (1.1) ist wichtig; vergleiche Aufgabe 1.7.

Beweis: Sei

$$\exists x_1\, \varphi_1, \quad \exists x_2\, \varphi_2, \quad \exists x_3\, \varphi_3, \quad \ldots$$

eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln, die mit einem $\exists$-Quantor beginnen.
Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist; Details: Übung (Aufgabe 1.8).

Sei $\Psi_0 := \Phi$. Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ eine Formel ψ_n und eine Formelmenge $\Psi_n := \Psi_{n-1} \cup \{\psi_n\} = \Phi \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ wie folgt: Zu $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei y_n die erste Variable in VAR die **nicht** in $\mathrm{frei}(\Psi_{n-1} \cup \{\varphi_n\})$ vorkommt (eine solche Variable existiert, da $|\mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)| = \infty$ ist und daher $\mathsf{VAR} \setminus \mathrm{frei}(\Psi_{n-1} \cup \{\varphi_n\}) \neq \emptyset$). Setze

$$\psi_n \ := \ \bigl(\exists x_n\, \varphi_n \ \to \ \varphi_n \tfrac{y_n}{x_n}\bigr).$$

Es sei

$$\Psi \ := \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n \ = \ \Phi \cup \{\psi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$$

Klar: Gemäß Konstruktion von Ψ gilt: Ψ enthält Beispiele.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ψ_n ist widerspruchsfrei.

Beweis: Per Induktion nach n.

$n = 0$:
$\Psi_0 = \Phi$ ist widerspruchsfrei gemäß der Voraussetzung von Lemma 1.39.

$n{-}1 \to n$:
Angenommen, Ψ_n ist widerspruchsvoll. Gemäß Lemma 1.24 (c) gilt dann

$$\Psi_n \ \vdash_{\mathfrak{K}_S} \ \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0.$$

Das heißt, es gibt ein $\Gamma \subseteq_e \Psi_n$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Fall 1: $\psi_n \notin \Gamma$:

Dann ist $\Gamma \subseteq \Psi_{n-1}$, und daher $\Psi_{n-1} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß 1.24 (c) ist Ψ_{n-1} also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme

Fall 2: $\psi_n \in \Gamma$:

Sei $\Gamma' := \Gamma \setminus \{\psi_n\}$. Insbesondere gilt: $\Gamma' \subseteq_e \Psi_{n-1}$.
Da die Sequenz $\Gamma \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist, sind auch die folgenden Sequenzen in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar:

(1)	Γ', ψ_n	$\vdash \exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(da $\Gamma = \Gamma' \cup \{\psi_n\}$)
(2)	$\Gamma', \big(\neg\exists x_n\, \varphi_n\ \vee\ \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\big)$	$\vdash \exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	$\big($da $\psi_n = (\exists x_n\, \varphi_n \to \varphi_n \frac{y_n}{x_n})\big)$
(3)	$\Gamma', \neg\exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \neg\exists x_n\, \varphi_n$	(V)
(4)	$\Gamma', \neg\exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \big(\neg\exists x_n\, \varphi_n\ \vee\ \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\big)$	($\vee$S) auf (3)
(5)	$\Gamma', \neg\exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(KS) auf (4), (2)
(6)	$\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	$\vdash \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	(V)
(7)	$\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	$\vdash \big(\neg\exists x_n\, \varphi_n \vee\ \varphi_n \frac{y_n}{x_n}\big)$	($\vee$S) auf (6)
(8)	$\Gamma', \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$	$\vdash \exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(KS) auf (7), (2)
(9)	$\Gamma', \exists x_n\, \varphi_n$	$\vdash \exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	($\exists$A) auf (8)
(10)	Γ'	$\vdash \exists v_0\ \neg v_0{=}v_0$	(FU) auf (9), (5).

Das heißt, die Sequenz $\Gamma' \vdash \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$ ist in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar.
Da $\Gamma' \subseteq \Psi_{n-1}$ ist, gilt also $\Psi_{n-1} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Gemäß Lemma 1.24 (c) ist Ψ_{n-1} also widerspruchsvoll. $\lightning$ Widerspruch zur Induktionsannahme

Somit haben wir gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge Ψ_n widerspruchsfrei ist. Da $\Psi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi_n$ ist, ist daher auch die Menge Ψ widerspruchsfrei (Details: Übung; siehe Aufgabe 1.9).

$\square$ Lemma 1.39

Lemma 1.40.
*Sei σ eine **abzählbare** Signatur, und sei $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge. Dann gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \supseteq \Psi$, die negationstreu ist.*

Beweis:
Sei $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln.
Beachte: Eine solche Aufzählung existiert, da σ abzählbar ist (vgl. Aufgabe 1.8).

Induktiv definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formelmenge Θ_n wie folgt:
$\Theta_0 \ := \ \Psi$, und für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist

$$\Theta_n \ := \begin{cases} \Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} & \text{, falls } \Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei ist.} \\ \Theta_{n-1} & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Sei $\Theta := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Theta_n$.

Behauptung 3. Θ ist negationstreu.

Beweis:
Sei φ eine beliebige $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel. Da $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine Aufzählung aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, so dass $\varphi = \varphi_n$ ist.
Wir müssen zeigen, dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_n$ oder $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_n$ gilt. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

<u>Fall 1</u>: $\varphi_n \in \Theta$:

Dann gilt offensichtlich (gemäß Regel (V) von $\mathfrak{K}_S$), dass $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi_n$.

Fall 2: $\varphi_n \notin \Theta$:

Dann gilt: $\varphi_n \notin \Theta_n$ (da $\Theta_n \subseteq \Theta$). Gemäß Definition der Menge Θ_n ist daher $\Theta_{n-1} \cup \{\varphi_n\}$ widerspruchsvoll. Lemma 1.25 (b) liefert, dass $\Theta_{n-1} \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_n$. Wegen $\Theta \supseteq \Theta_{n-1}$ gilt also: $\Theta \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi_n$.

$\square_{\text{Beh. } 3}$

Behauptung 4. Θ ist widerspruchsfrei.

Beweis: Übung (Aufgabe 1.10). $\square_{\text{Beh. } 4}$

Die Gültigkeit von Lemma 1.40 folgt unmittelbar aus Behauptung 3 und Behauptung 4.

$\square_{\text{Lemma } 1.40}$

Wir können nun endlich das Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen beweisen:

Lemma 1.41 (Erfüllbarkeitslemma für abzählbare Signaturen)**.**
*Sei σ eine **abzählbare** Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine widerspruchsfreie Formelmenge. Dann ist Φ erfüllbar.*

Beweis:
Für jedes $\varphi \in \Phi$ sei φ' die wie folgt definierte Formel: Sei $n := |\operatorname{frei}(\varphi)|$ und seien $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ so dass $\operatorname{frei}(\varphi) = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}\}$. Sei $\mathcal{S}$ die Substitution mit $\operatorname{Def}(\mathcal{S}) = \operatorname{frei}(\varphi)$ und $\mathcal{S}(v_{i_j}) = v_{2 \cdot i_j}$ für alle $j \in [n]$. Sei $\varphi' := \varphi\mathcal{S}$.
Wir setzen $\Phi' := \{\varphi' : \varphi \in \Phi\}$. Insbes. ist $\operatorname{frei}(\Phi') = \{v_{2 \cdot i} : v_i \in \operatorname{frei}(\Phi)\} \subseteq \{v_{2 \cdot i} : i \in \mathbb{N}\}$. Es gilt:

(a) Die Menge $\mathsf{VAR} \setminus \operatorname{frei}(\Phi')$ ist unendlich, da keine der Variablen $v_1, v_3, v_5, v_7, v_9, \ldots$ frei in Φ' vorkommt.

(b) Φ' ist widerspruchsfrei, denn:

Angenommen Φ' wäre widerspruchsvoll. Dann gilt gemäß Lemma 1.24 (c), dass $\Phi' \vdash_{\mathfrak{K}_S} \perp$ für $\perp := \exists v_0\, \neg v_0{=}v_0$. Somit gibt es ein $\Gamma' \subseteq_e \Phi'$, so dass die Sequenz $\Gamma' \vdash \perp$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist. Insbes. ist Γ' widerspruchsvoll.

Sei $\Gamma := \{\varphi : \varphi' \in \Gamma'\}$. Klar: $\Gamma \subseteq_e \Phi$. Da Φ widerspruchsfrei ist, ist auch Γ widerspruchsfrei. Da Γ endlich ist, ist die Menge $\mathsf{VAR} \setminus \operatorname{frei}(\Gamma)$ unendlich. Gemäß Lemma 1.39 gibt es ein widerspruchsfreies $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Gamma \subseteq \Psi$, so dass Ψ Beispiele enthält. Gemäß Lemma 1.40 gibt es ein widerspruchsfreies $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \subseteq \Theta$, das negationstreu ist. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele. Der Satz von Henkin (Satz 1.38) liefert, dass Θ erfüllbar ist. Wegen $\Gamma \subseteq \Theta$ ist also Γ erfüllbar.

D.h. es gibt eine σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. D.h.: $\mathcal{I} \models \varphi$ für jedes $\varphi \in \Gamma$. Sei $\mathcal{I}' := (\mathcal{A}, \beta')$, wobei β' eine Belegung ist, für die für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\beta'(v_{2 \cdot i}) = \beta(v_i)$. Für jedes $\varphi \in \Gamma$ folgt aus $\mathcal{I} \models \varphi$ mit Hilfe des Koinzidenzlemmas und des Substitutionslemmas, dass $\mathcal{I}' \models \varphi'$ (Details: Übung!). Somit gilt: $\mathcal{I}' \models \Gamma'$, d.h. Γ' ist erfüllbar. Aus Korollar 1.23 folgt, dass Γ' widerspruchsfrei ist. Widerspruch (da Γ' ja widerspruchsvoll ist)!

(c) Wenn Φ' erfüllbar ist, dann ist auch Φ erfüllbar, denn:

Aus einer Interpretation, die Φ' erfüllt, lässt sich leicht eine Interpretation bilden, die Φ erfüllt (Details: Übung!).

Wegen (c) genügt es zu zeigen, dass Φ' erfüllbar ist. Wegen (a) und (b) erfüllt Φ' die Voraussetzungen von Lemma 1.39. Daher gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi'$, so dass Ψ Beispiele enthält.
Gemäß Lemma 1.40 gibt es eine negationstreue, widerspruchsfreie Formelmenge $\Theta \subseteq \text{FO}[\sigma]$ mit $\Theta \subseteq \Psi$. Da Ψ Beispiele enthält, enthält auch Θ Beispiele.
Der Satz von Henkin (Satz 1.38) liefert, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Theta$. Wegen $\Phi' \subseteq \Theta$ gilt insbesondere, dass $[\mathcal{I}_\Theta] \models \Phi'$. Somit ist Φ' erfüllbar. Gemäß (c) ist daher auch Φ erfüllbar.

$\square$

Insgesamt ist damit der Beweis der Erfüllbarkeitslemmas und damit auch der Beweis des Vollständigkeitssatzes für den Spezialfall, dass σ eine abzählbare Signatur ist, abgeschlossen. In Kapitel 5.3 von [EFT98] findet sich ein Beweis des Erfüllbarkeitslemmas auch für überabzählbar große Signaturen. Auch dieser Beweis wird hier in der Vorlesung *Ausgewählte Kapitel der Logik: klassische Resultate* behandelt (siehe die verfügbaren „handschriftlichen Notizen“).

1.6 Literaturhinweise

Zur weiteren Lektüre werden die Kapitel 4–6 in [EFT98] empfohlen.

1.7 Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1.
Sei M eine Menge und sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über M.

Definition:

(a) Eine Ableitungsregel $\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ über M heißt **in $\mathfrak{K}$ ableitbar**, wenn b aus $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathfrak{K}$ ableitbar ist.

(b) Zwei Kalküle $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ über M heißen **gleich stark**, wenn für alle $V \subseteq M$ gilt: Die Menge der aus V in $\mathfrak{K}_1$ ableitbaren Elemente ist gleich der Menge der aus V in $\mathfrak{K}_2$ ableitbaren Elemente.

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n, b \in M$ gilt:
$\dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b}$ ist genau dann in $\mathfrak{K}$ ableitbar, wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K} \cup \left\{ \dfrac{\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}}{b} \right\}$ gleich stark sind.

Aufgabe 1.2.
Zeigen Sie, dass die Regel $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \big((\varphi \wedge \psi) \to \chi\big)}$ im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Aufgabe 1.3.
Betrachten Sie für alle $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ die Regel

$$(\forall\exists) \quad \dfrac{}{\Gamma,\ \exists x\, \varphi\ \vdash\ \forall x\, \varphi}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Regel $(\forall\exists)$ korrekt ist.

(b) Sei $\mathfrak{K}_S{}'$ der Kalkül, der aus dem Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ durch Hinzufügen der Regel $(\forall\exists)$ entsteht. Prüfen Sie, ob *jede* Sequenz in $\mathfrak{K}_S{}'$ ableitbar ist.

Aufgabe 1.4.
Beweisen Sie Lemma 1.36.

Aufgabe 1.5.
Arbeiten Sie die Details für den Fall $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ im Beweis des Satzes von Henkin (Satz 1.38) aus.

Aufgabe 1.6.
Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.
Berechnen Sie die reduzierte Termstruktur $[\mathcal{A}_\Phi]$ für die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Phi \quad := \quad & \{\, v_i = v_{i+2} \; : \; i \geqslant 1 \,\} \\ & \cup \{\; E(v_0, v_7),\; E(v_1, v_4),\; E(v_6, v_0),\; \forall v_1 \forall v_3 \; \big(\neg E(v_1, v_3) \vee E(v_3, v_1)\big) \;\}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 1.7.
Sei σ eine beliebige Signatur. Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Phi \quad := \quad \{\, v_0 = t \; : \; t \in T_\sigma \,\} \;\cup\; \{\; \exists v_0 \exists v_1 \, \neg v_0 = v_1 \;\}\,.$$

Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

(a) Φ ist widerspruchsfrei.

(b) Es gibt keine Menge $\Psi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ mit $\Psi \supseteq \Phi$, so dass Ψ widerspruchsfrei ist und Beispiele enthält.

Aufgabe 1.8.
Beweisen Sie, dass Folgendes gilt: Ist σ eine abzählbare Signatur, so ist die Menge aller $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln abzählbar.

Aufgabe 1.9.
Arbeiten Sie die Details am Ende des Beweises von Lemma 1.39 aus, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die im Beweis von Lemma 1.39 definierte Menge Ψ_n widerspruchsfrei, so ist auch die Menge $\Psi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n$ widerspruchsfrei.

Aufgabe 1.10.
Beweisen Sie Behauptung 4 aus dem Beweis von Lemma 1.40, das heißt, zeigen Sie, dass die im Beweis von Lemma 1.40 definierte Formelmenge Θ widerspruchsfrei ist.

Aufgabe 1.11.
Zeigen Sie Folgendes:

(a) Es gibt eine widerspruchsfreie, negationstreue Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Formelmenge $\{\, \exists v_0\, P(v_0) \,\} \cup \{\, \neg P(t) \; : \; t \in T_\sigma \,\}$.

(b) Es gibt eine widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$, die Beispiele enthält, so dass $[\mathcal{I}_\Phi] \not\models \Phi$.

2 Der Endlichkeitssatz und die Sätze von Löwenheim und Skolem

2.1 Der Endlichkeitssatz

Der **Endlichkeitssatz** ist auch unter dem Namen **Kompaktheitssatz** bekannt. Unter Verwendung der Ergebnisse aus Kapitel 1 kann der Endlichkeitssatz leicht gezeigt werden. Endlichkeitssatz Kompaktheitssatz

Satz 2.1 (Endlichkeitssatz bzw. Kompaktheitssatz)**.**
Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge. Dann gilt:

*(a) Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede **endliche** Teilmenge von Φ ist erfüllbar.*

(b) Für jedes $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$\Phi \models \psi \quad\iff\quad \textit{Es gibt eine } \textbf{\textit{endliche}} \textit{ Menge } \Gamma \subseteq \Phi \textit{ mit } \Gamma \models \psi.$$

Beweis:

(a)
$$\begin{aligned} \Phi \text{ erfüllbar} &\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \Phi \text{ widerspruchsfrei} \\ &\underset{\substack{\text{Lemma 1.26} \\ \text{(Syntakt. Endlichkeitslemma)}}}{\iff} \text{Jede endliche Teilmenge von } \Phi \text{ ist widerspruchsfrei.} \\ &\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \text{Jede endliche Teilmenge von } \Phi \text{ ist erfüllbar.} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} \Phi \models \psi &\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi \\ &\iff \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi \\ &\underset{\text{Vollst.satz}}{\iff} \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \models \psi. \end{aligned}$$

□

Man kann den Endlichkeitssatz nutzen, um zu zeigen, dass bestimmte Klasse von Strukturen nicht $\mathrm{FO}[\sigma]$-definierbar (in der Klasse **aller** σ-Strukturen) sind.
Zur Formulierung der Ergebnisse sind die folgenden Notationen nützlich:

Definition 2.2 (Modellklassen und Axiomatisierbarkeit)**.** Sei σ eine Signatur.

(a) Für eine Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätzen sei

$$\mathsf{MOD}_\sigma(\Phi) \;:=\; \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \Phi\}$$

die **Modellklasse** von Φ bezüglich σ. Modellklasse

(b) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt (erststufig) **axiomatisierbar** (oder **Δ-elementar**), wenn es eine Menge Φ von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$. axiomatisierbar Δ-elementar

endlich axiomatisierbar
elementar

(c) Eine Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen heißt **endlich axiomatisierbar** (oder **elementar**), wenn es eine **endliche** Menge Φ von FO[σ]-Sätzen gibt, so dass $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Beobachtung 2.3.
$\mathcal{K}$ ist genau dann endlich axiomatisierbar, wenn es einen FO[σ]-Satz φ mit $\mathcal{K} = \mathsf{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ gibt.

Korollar 2.4.
Für jede Klasse $\mathcal{K}$ von σ-Strukturen gilt:

$$\mathcal{K} \text{ ist endlich axiomatisierbar} \iff \mathcal{K}^C := \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \notin \mathcal{K}\} \text{ ist endlich axiomatisierbar.}$$

Beweis: Übung.

□

gleichmächtig

schmächtiger

Definition 2.5 (Mächtigkeit von Mengen)**.**
Zwei Mengen A und B heißen **gleichmächtig** (kurz: $A \sim B$), wenn es eine bijektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **höchstens so mächtig** wie B (kurz: $A \preccurlyeq B$) und B heißt **mindestens so mächtig** wie A, wenn es eine injektive Abbildung von A nach B gibt.
A heißt **schmächtiger** (oder: **weniger mächtig**) als B (kurz: $A \prec B$), wenn es eine injektive, aber keine bijektive Abbildung von A nach B gibt.

Mächtigkeit
abzählbar
überabzählbar

Definition 2.6.
Die **Mächtigkeit** einer σ-Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Wir bezeichnen eine Menge M als **abzählbar**, wenn sie entweder endlich ist oder dieselbe Mächtigkeit wie $\mathbb{N}$ besitzt. Eine Menge M heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht abzählbar ist.
Eine Struktur ist endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Satz 2.7.
*Für jede Signatur σ ist die Klasse aller **unendlichen** σ-Strukturen axiomatisierbar.*

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei

$$\varphi_n \quad := \quad \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j.$$

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi_n \quad \iff \quad |A| \geqslant n.$$

Somit gilt:

$$A \text{ ist unendlich} \quad \iff \quad \mathcal{A} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}.$$

Das heißt: Die Menge $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ axiomatisiert die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen.

□

Im Folgenden zeigen wir, das die Klasse aller **endlichen** σ-Strukturen **nicht** axiomatisierbar ist.

Lemma 2.8. *Sei σ eine Signatur.*
Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, für die Folgendes gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geqslant n$ und eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $|A| = m$ und $\mathcal{A} \models \Phi$ (d.h. Φ besitzt beliebig große endliche Modelle). Dann besitzt Φ auch ein unendliches Modell, d.h., es gibt eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $|B| = \infty$ und $\mathcal{B} \models \Phi$.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi_n \quad := \quad \exists x_1 \cdots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j.$$

Sei $\Phi' := \Phi \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$. Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt, dass jede **endliche** Teilmenge von Φ' ein Modell hat. Der Endlichkeitssatz liefert, dass auch Φ' ein Modell hat, d.h. es gibt eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \models \Phi'$. Wegen $\mathcal{B} \models \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ muss $\mathcal{B}$ unendlich sein.

□

Daraus folgt direkt:

Satz 2.9 (Nicht-Axiomatisierbarkeit der Endlichkeit)**.**
Für jede Signatur σ gilt:

*(a) Die Klasse aller **endlichen** σ-Strukturen ist **nicht** axiomatisierbar.*

*(b) Die Klasse aller **unendlichen** σ-Strukturen ist **nicht** endlich axiomatisierbar.*

Beweis:

(a) Folgt direkt aus Lemma 2.8.

(b) Folgt aus (a) und Korollar 2.4.

□

Auf ähnliche Weise kann man unter Verwendung des Endlichkeitssatzes auch Folgendes zeigen:

Satz 2.10 (Nicht-Axiomatisierbarkeit von Graph-Zusammenhang)**.**
Die Klasse

$$\begin{array}{rcll} ZG & := & \{\; G = (V, E^G) \;:\; & V \text{ ist eine Menge, } E^G \subseteq V \times V \text{ und für alle } a, b \in V \\ & & & \text{gibt es in } E^G \text{ einen Weg endlicher Länge von } a \text{ nach } b \;\} \end{array}$$

aller stark zusammenhängenden (endlichen oder unendlichen) gerichteten Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Beweis: Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\psi_n(x, y)$ eine FO[σ]-Formel, die besagt, dass es einen Weg der Länge n von x nach y gibt. Das heißt:

$$\psi_0(x, y) \;:=\; x{=}y, \qquad \text{und für alle } n \geqslant 1 \text{ ist}$$

$$\psi_n(x, y) \;:=\; \exists x_0\, \exists x_1 \cdots \exists x_n \, \Big(x_0{=}x \;\wedge\; x_n{=}y \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{n} E(x_{i-1}, x_i)\Big).$$

Somit gilt für alle Graphen $G = (V, E^G)$, für alle $a, b \in V$ und für alle $n \in \mathbb{N}$:

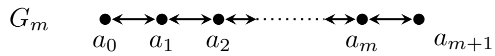
$$G \models \psi_n[a, b] \quad \Longleftrightarrow \quad \text{es gibt in } G \text{ einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b.$$

Also gilt auch:

Es gibt in G **keinen** Weg endlicher Länge von a nach b $\iff$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $G \models \neg\psi[a, b]$.

Angenommen, die Klasse ZG wäre axiomatisierbar durch eine Menge Φ von FO[E]-Formeln.
Dann ist die Menge $\Psi := \Phi \cup \{\neg\psi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$ **unerfüllbar**.
Im Folgenden zeigen wir, dass jede **endliche** Teilmenge Γ von Ψ erfüllbar ist. Laut Endlichkeitssatz muss dann also auch Ψ erfüllbar sein. Widerspruch!

Sei also Γ eine endliche Teilmenge von Ψ. Sei $m := \max\{n \in \mathbb{N} : \neg\psi_n \in \Gamma\}$. Sei G_m der Graph, der aus einer ungerichteten Kette aus m+2 Knoten besteht, d.h. $G_m = (V, E^{G_m})$ mit $V := \{a_0, a_1, \ldots, a_{m+1}\}$ und $E^{G_m} := \{(a_{i-1}, a_i),\ (a_i, a_{i-1}) : i \in \{1, \ldots, m+1\}\}$.



Dann gilt:

(a) $G_m \models \Phi$, da G_m stark zusammenhängend ist.

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leqslant m$ gilt: $G_m \models \neg\psi_n[a_0, a_{m+1}]$, da der kürzeste Weg von a_0 nach a_{m+1} in G_m die Länge m+1 hat.

Gemäß der Wahl von m gilt daher für die Belegung β mit $\beta(x) = a_0$ und $\beta(y) = a_{m+1}$:

$$(G_m, \beta) \models \Gamma.$$

Somit ist Γ erfüllbar.

$\square$

2.2 Die Sätze von Löwenheim und Skolem

Satz 2.11 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei σ eine Signatur.*
Jede ***abzählbare****, erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ besitzt ein abzählbares Modell.*

Beweis:
Sei Φ eine abzählbare, erfüllbare Menge von FO[σ]-Formeln.
Sei σ' die Menge aller in Φ vorkommenden Symbole aus σ. Da Φ abzählbar ist, ist auch σ' abzählbar.

O.B.d.A. können wir außerdem annehmen, dass $\mathsf{VAR}\setminus\mathrm{frei}(\Phi)$ unendlich ist $\big($ansonsten ersetzen wir — wie im Beweis von Lemma 1.41 — in Φ jede Variable v_i durch die Variable v_{2i} (für alle $i \in \mathbb{N}$)$\big)$.

Da Φ erfüllbar ist, ist Φ gemäß Vollständigkeitsatz auch widerspruchsfrei (sowohl bzgl. σ als auch bzgl. σ'). Gemäß Lemma 1.39 und Lemma 1.40 gibt es daher eine widerspruchfreie, negationstreue Menge $\Theta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma']$ mit $\Theta \supseteq \Phi$, die Beispiele enthält.
Gemäß Satz von Henkin (Satz 1.38) wird Θ von der reduzierten Terminterpretation $[\mathcal{I}_\Theta] = \big([\mathcal{A}_\Theta], [\beta_\Theta]\big)$ erfüllt. Gemäß Definition 1.35 ist die Mächtigkeit des Universums $[A_\Theta]$ höchstens so groß, wie die Mächtigkeit der Menge $T_{\sigma'}$ aller σ'-Terme. Da σ'-abzählbar ist, ist auch $T_{\sigma'}$ abzählbar. Somit ist $\mathcal{J}' := [\mathcal{I}_\Theta]$ eine abzählbare σ'-Interpretation, die ein Modell von $\Theta \supseteq \Phi$ ist.
Gemäß Koinzidenzlemma ist auch jede σ-Expansion $\mathcal{J}$ von $\mathcal{J}'$ ein Modell von Φ.

$\square$

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhalten wir:

Korollar 2.12. *Sei σ eine abzählbare Signatur.*
*Dann ist die Klasse aller **überabzählbaren** σ-Strukturen nicht axiomatisierbar.*

Beweis:
Da σ abzählbar ist, ist auch die Menge $\mathrm{FO}[\sigma]$ abzählbar. Somit hat gemäß Satz von Löwenheim und Skolem jeder erfüllbare Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ein abzählbares Modell. $\square$

Auf ähnliche Art wie Satz 2.11 kann man unter Verwendung der Techniken, die wir zum Beweis des Vollständigkeitssatzes für den Fall *beliebiger* Signaturen entwickelt haben, auch Folgendes zeigen.

Satz 2.13 (Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei σ eine Signatur.*
Jede erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ besitzt ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß ist wie die Mächtigkeit von $\mathrm{FO}[\sigma]$.

Beweis: Übung!

$\square$

Satz 2.14 (Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.**
*Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu **jeder** Menge M ein Modell von Φ, dessen Mächtigkeit mindestens so groß wie die Mächtigkeit von M ist.*

Beweis: Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Sei M eine beliebige Menge. Für jedes $m \in M$ sei c_m ein neues Konstantensymbol, das nicht in σ vorkommt, so dass $c_m \neq c_n$ für alle $m, n \in M$ mit $m \neq n$ gilt. Sei $\sigma_M := \sigma \cup \{c_m : m \in M\}$. Wir betrachten die Formelmenge

$$\Psi \quad := \quad \Phi \ \cup \ \{ \neg\, c_m{=}c_n \ : \ m, n \in M \text{ mit } m \neq n \} \quad \subseteq \quad \mathrm{FO}[\sigma_M].$$

Behauptung 1: Ψ ist erfüllbar.

Gemäß Behauptung 1 gibt es eine σ_M-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\mathcal{I} \models \Phi$. Gemäß Wahl von Ψ gilt für alle $m, n \in M$, dass $c_m^{\mathcal{A}} \neq c_n^{\mathcal{A}}$. Somit ist die Abbildung $f : M \to A$ mit $f(m) := c_m^{\mathcal{A}}$ injektiv, d.h. A ist mindestens so mächtig wie M.
Außerdem ist gemäß der Wahl von Ψ das σ-Redukt von $\mathcal{I}$ ein Modell von Φ.

Um den Beweis von Satz 2.14 abzuschließen, müssen wir nur noch Behauptung 1 beweisen. Dazu nutzen wir den Endlichkeitssatz. Um zu zeigen, dass Ψ erfüllbar ist, reicht es zu zeigen, dass jede *endliche* Teilmenge von Ψ erfüllbar ist.

Sei also $\Gamma \subseteq_e \Psi$. Da Γ endlich ist, gibt es eine Zahl $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und paarweise verschiedene Elemente $m_1, \dots, m_\ell \in M$, so dass

$$\Gamma \quad \subseteq \quad \Phi' \quad := \quad \Phi \ \cup \ \{ \neg\, c_{m_i}{=}c_{m_j} \ : \ i, j \in \{1, \dots, \ell\} \text{ mit } i \neq j \}.$$

Laut Voraussetzung besitzt Φ ein *unendliches* Modell $\mathcal{J} = (\mathcal{B}, \beta)$. Da das Universum B von $\mathcal{B}$ unendlich ist, können wir darin ℓ paarweise verschiedene Elemente $b_1, \dots, b_\ell$ finden. Sei $\mathcal{B}'$ die σ_M-Expansion von $\mathcal{B}$, bei der für jedes $i \in \{1, \dots, \ell\}$ das Konstantensymbol c_{m_i} mit dem Element b_i interpretiert wird, und bei der für jedes $m \in M \setminus \{m_1, \dots, m_\ell\}$ das Konstantensymbol c_m mit dem Element b_1 interpretiert wird.

Gemäß Koinzidenzlemma gilt für die σ_M-Interpretation $\mathcal{J}' := (\mathcal{B}', \beta)$, dass $\mathcal{J}' \models \Phi$. Insgesamt ist also $\mathcal{J}'$ ein Modell von Φ', und daher auch ein Modell von Γ. Dies beendet den Beweis von Behauptung 1 und somit auch den Beweis von Satz 2.14.

$\square$

2.3 Elementare Äquivalenz und Nichtstandardmodelle

Definition 2.15. Sei σ eine Signatur.

elementar äquivalent
$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$
Theorie
$\mathrm{Th}(\mathcal{A})$

(a) Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **elementar äquivalent** (kurz: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), wenn sie dieselben FO[σ]-Sätze erfüllen (d.h.: Für jeden FO[σ]-Satz φ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$).

(b) Die **Theorie** $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Menge aller FO[σ]-Sätze, die $\mathcal{A}$ erfüllt. D.h.:

$$\mathrm{Th}(\mathcal{A}) \;:=\; \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma] : \varphi \text{ ist ein Satz mit } \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Klar:

- Für alle FO[σ]-Sätze φ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt: entweder $\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$ oder $\neg\varphi \in \mathrm{Th}(\mathcal{A})$.
- Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \mathrm{Th}(\mathcal{B})$.

Daraus folgt direkt:

Korollar 2.16. *Für jede Signatur σ und jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathcal{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar (durch die Menge $\Phi := \mathrm{Th}(\mathcal{A})$).*

Bemerkung 2.17. Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

Die Richtung „$\Longleftarrow$" ist offensichtlich. Die Richtung „$\Longrightarrow$" folgt für **endliche** σ aus Aufgabe 0.3 und für **unendliche** σ aus Aufgabe 2.2.

(b) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, aber $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.

Dies folgt leicht aus dem aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem.

Details: Übung (siehe Aufgabe 2.2).

Beispiel 2.18 (Nichtstandardmodell von $\mathcal{N}_{\leqslant}$)**.**
Sei $\mathcal{N}_{\leqslant} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$. Gemäß Bemerkung 2.17(b) gibt es eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathcal{B}$, die nicht isomorph zu $\mathcal{N}_{\leqslant}$ ist. Eine solche Struktur $\mathcal{B}$ wird **Nichtstandardmodell von $\mathcal{N}_{\leqslant}$** genannt.

Frage: Wie sieht $\mathcal{B}$ aus?

diskrete lineare Ordnung

Wir wissen, dass $\mathcal{N}_{\leqslant} = (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$ eine **diskrete lineare Ordnung** ist, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt. Der Begriff "diskrete lineare Ordnung" ist dabei wie folgt definiert: Eine lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ heißt **diskret**, wenn für jedes $a \in A$ folgendes gilt:

- Falls es ein $b \in A$ gibt, das echt größer als a ist (d.h. $b \neq a$ und $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$), so gibt es auch ein **kleinstes** Element, das echt größer als a ist (d.h. ein a' mit $a' \neq a$ und $a \leqslant^{\mathcal{A}} a'$ und $a' \leqslant^{\mathcal{A}} b$, für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ und $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$). Dieses Element wird **Nachfolger** von A bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$ genannt.

- Falls es ein $b \in A$ gibt, das echt kleiner als a ist (d.h. $b \neq a$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} a$), so gibt es auch ein **größtes** Element, das echt kleiner als a ist (d.h., ein a' mit $a' \neq a$ und $a' \leqslant^{\mathcal{A}} a$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} a'$, für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} a$). Dieses Element wird **Vorgänger** von a bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$ genannt.

Man sieht leicht, dass es einen FO[$\leqslant$]-Satz δ gibt, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt (Details: Übung):

$$\mathcal{A} \models \delta \quad\iff\quad \begin{array}{l}\mathcal{A} \text{ ist eine diskrete lineare Ordnung, die} \\ \text{ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.}\end{array}$$

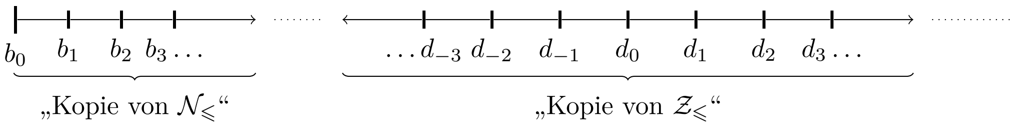
Wegen $\mathcal{N}_{\leqslant} \models \delta$ und $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}_{\leqslant}$ gilt auch $\mathcal{B} \models \delta$. Somit ist $\mathcal{B}$ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes, aber kein größtes Element besitzt.
Sei $b_0 \in B$ das kleinste Element bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$. Da $\leqslant^{\mathcal{B}}$ diskret ist und kein größtes Element besitzt, muss es einen Nachfolger (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$) b_1 von b_0 geben, und es muss für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $b_n \in B$ geben, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: b_{n+1} ist der Nachfolger von b_n (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$).
Sei $B' := \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Klar: $B' \subseteq B$, und $\mathcal{B}_{|B'} \cong \mathcal{N}_{\leqslant}$. Wegen $\mathcal{B} \ncong \mathcal{N}_{\leqslant}$ muss also gelten: $B' \subsetneq B$, das heißt, es es gibt ein $d_0 \in B \setminus B'$.
Da $\leqslant^{\mathcal{B}}$ eine diskrete lineare Ordnung ohne größtes Element ist, gilt außerdem Folgendes:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $b_n \leqslant^{\mathcal{B}} d_0$ (und $b_n \neq d_0$).
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es ein $d_n \in B$, so dass d_{n+1} der Nachfolger von d_n bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$ ist.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es ein $d_{-n} \in B$, so dass $d_{-(n+1)}$ der Vorgänger von d_{-n} bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$ ist.
- Für alle $d \in \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $b_n \leqslant d$ und $b_n \neq d$.

Insgesamt gilt für $B'' := \{d_i : i \in \mathbb{Z}\}$:

$$\mathcal{B}_{|B''} \;\cong\; \mathcal{Z}_{\leqslant} := (\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}}),$$

und $\mathcal{B}_{|B' \cup B''}$ sieht folgendermaßen aus:



Außerdem muss für alle $c \in B \setminus (B' \cup B'')$ gelten:

- $b_n \leqslant c$, für alle $n \in \mathbb{N}$,
- es existiert ein $i \in \mathbb{Z}$, so dass $d_i \leqslant c \iff$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt $d_i \leqslant c$.

Sei nun $\pi : B \to B$ die Abbildung mit

- $\pi_{|B \setminus B''} := \mathrm{id}_{|B \setminus B''}$ (das heißt $\pi(c) = c$, für alle $c \in B \setminus B''$)
- $\pi(d_i) := d_{i+1}$, für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Man sieht leicht, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{B}$ ist, d.h., $\pi(B) = B$ und $\pi(\leqslant^{\mathcal{B}}) = \leqslant^{\mathcal{B}}$.

Beispiel 2.19.
Wir nutzen die Erkenntnisse aus Beispiel 2.18 nun, um einen Beweis der Aussage

> “Die Klasse der endlichen linearen Ordnungen gerader Kardinalität ($\textsc{Even}_{\leqslant}$) ist nicht FO-definierbar in der Klasse aller endlichen linearen Ordnungen ($\textsc{Ord}_{\leqslant}$).”

anzugeben, der nicht auf Ehrenfeucht-Fraïssé Spielen beruht.[1]

Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Angenommen, $\textsc{Even}_{\leqslant}$ wäre FO-definierbar in $\textsc{Ord}_{\leqslant}$ durch einen FO[$\leqslant$]-Satz φ. Sei x eine Variable, die nicht in φ vorkommt, und sei $\tilde{\varphi}(x)$ die Formel, die aus φ entsteht, indem jeder Quantor eingeschränkt wird auf Elemente $< x$. D.h.: Jede Teilformel der Form $\exists y\,\psi$ (bzw. $\forall y\,\psi$) wird ersetzt durch die Formel $\exists y\,(y \leqslant x \wedge \neg y{=}x \wedge \psi)$ (bzw. $\forall y\,\big((y \leqslant x \;\wedge\; \neg y{=}x) \rightarrow \psi)\big)$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\leqslant} \models \tilde{\varphi}[n] \quad &\iff \quad \big(\{0,\dots,n-1\}, \leqslant^{\mathcal{N}}_{|\{0,\dots,n-1\}}\,\big) \models \varphi \\ &\iff \quad n \text{ ist gerade} \qquad (\text{denn } \varphi \text{ definiert } \textsc{Even}_{\leqslant} \text{ auf } \textsc{Ord}_{\leqslant}). \end{aligned}$$

Für den FO[$\leqslant$]-Satz

$$\psi \;:=\; \forall u \forall v\, \Big(\varphi_{\text{Succ}}(u,v) \rightarrow \big(\tilde{\varphi}(u) \;\leftrightarrow\; \neg\tilde{\varphi}(v)\big)\Big),$$

wobei $\varphi_{\text{Succ}}(u,v)$ ausdrückt, dass v der unmittelbare Nachfolger von u bzgl. $\leqslant$ ist, gilt dann offensichtlicherweise:

$$\mathcal{N}_{\leqslant} \;\models\; \psi.$$

Sei $\mathcal{B}$ die Struktur aus Beispiel 2.18. Wegen $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}_{\leqslant}$ gilt dann auch: $\mathcal{B} \models \psi$. Seien $d_0, d_1 \in B$ wie in Beispiel 2.18 gewählt. Wegen $\mathcal{B} \models \psi$ gilt dann insbesondere

$$\mathcal{B} \;\models\; \tilde{\varphi}[d_0] \quad\iff\quad \mathcal{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1].$$

Wir betrachten o.B.d.A. den Fall, dass

$$\mathcal{B} \;\models\; \tilde{\varphi}[d_0] \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1] \tag{2.1}$$

(der andere Fall kann analog behandelt werden).

Sei nun π der Isomorphismus aus Beispiel 2.18 mit $\pi(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$. Gemäß Isomorphielemma (Korollar 0.32) folgt aus (2.1), dass $\pi(\mathcal{B}) \;\models\; \tilde{\varphi}[\pi(d_0)]$. Wegen $\pi(\mathcal{B}) \;=\; \mathcal{B}$ und $\pi(d_0) \;=\; d_1$ (vgl. Beispiel 2.18) gilt also: $\mathcal{B} \models \tilde{\varphi}[d_1]$. Dies ist ein Widerspruch zu (2.1), da $\mathcal{B} \not\models \tilde{\varphi}[d_1]$. □

Zur Erinnerung (Standardmodell der Arithmetik):

- $\sigma_{\text{Ar}} = \{\leqslant, +, \times, 0, 1\}$, wobei $\leqslant$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist, $+$ und $\times$ zwei 2-stellige Funktionssymbole sind und 0 und 1 zwei Konstantensymbole sind.
- Das **Standardmodell der Arithmetik** ist die σ_{Ar}-Struktur

  $$\mathcal{N} \;:=\; \big(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}\big),$$

  wobei $\leqslant^{\mathcal{N}}$, $\leqslant^{\mathcal{N}}$, $\times^{\mathcal{N}}$ die natürliche lineare Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind, und $0^{\mathcal{N}}$, $1^{\mathcal{N}}$ die Zahlen 0 und 1 sind.

Nichtstandardmodell der Arithmetik

Definition 2.20. Ein **Nichtstandardmodell der Arithmetik** ist eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente, aber nicht-isomorphe σ_{Ar}-Struktur.

[1] Der hier vorgestellte Beweis ist von Martin Otto [Ott11].

Aus Bemerkung 2.17 (b) folgt direkt, dass es Nichtstandardmodelle der Arithmetik gibt. Gemäß dem folgenden Satz gibt es sogar ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

Satz 2.21 (Der Satz von Skolem)**.**
Es gibt ein abzählbares Nichstandardmodell der Arithmetik.

Beweis:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\underline{n}$ der folgendermaßen induktiv definierte σ_{Ar}-Term:

$$\underline{0} \ := \ 0, \quad \text{und für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ sei} \quad \underline{n{+}1} \ := \ \underline{n} + 1.$$

In $\mathcal{N}$ wertet sich der Term $\underline{n}$ zur Zahl n aus, d.h. es gilt $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$\Phi \quad := \quad \text{Th}(\mathcal{N}) \ \cup \ \{ \neg\, x{=}\underline{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \ \}.$$

Dann ist jede **endliche** Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi$ erfüllbar — z.B. durch die Interpretation $(\mathcal{N}, \beta)$ mit $\beta(x) := m{+}1$, wobei $m := \max\{n \in \mathbb{N} : \neg\, x{=}\underline{n} \ \in \Gamma\}$. Gemäß Endlichkeitssatz ist daher auch Φ erfüllbar. Gemäß Satz von Löwenheim und Skolem besitzt Φ ein abzählbares Modell (beachte dazu: Φ ist abzählbar, da es nur abzählbar viele $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Formeln gibt).
Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{B}, \beta)$ ein abzählbares Modell von Φ. Dann ist $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}$, denn für jeden $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz φ gilt:

- Falls $\mathcal{N} \models \varphi$, so $\varphi \in \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathcal{B} \models \varphi$.
- Falls $\mathcal{N} \not\models \varphi$, so $\mathcal{N} \models \neg\varphi$, also $\neg\varphi \in \text{Th}(\mathcal{N}) \subseteq \Phi$, also $\mathcal{B} \models \neg\varphi$ und somit $\mathcal{B} \not\models \varphi$.

Im Folgenden zeigen wir noch, dass $\mathcal{B} \ncong \mathcal{N}$. Angenommen, $\mathcal{B} \cong \mathcal{N}$. Dann gibt es einen Isomorphismus π von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{B}$. Gemäß Isomorphielemma (siehe Behauptung 1 im Beweis von Satz 0.32) gilt für jeden der σ_{Ar}-Terme $\underline{n}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$), dass

$$\pi\big(\underline{n}^{\mathcal{N}}\big) = \underline{n}^{\mathcal{B}}.$$

Wegen $\underline{n}^{\mathcal{N}} = n$ gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\pi(n) = \underline{n}^{\mathcal{B}}.$$

Da π ein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{B}$ ist, gilt

$$B \ = \ \{\pi(n) : n \in \mathbb{N}\} \ = \ \{\underline{n}^{\mathcal{B}} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit gilt für die Belegung β und die Variable x, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\beta(x) = \underline{n}^{\mathcal{B}}$. Somit gilt: $\mathcal{I} = (\mathcal{B}, \beta) \ \models \ x{=}\underline{n}$. Dies ist ein Widerspruch zu der Aussage, dass $\mathcal{I}$ ein Modell von Φ ist, da Φ die Formel $\neg\, x{=}\underline{n}$ enthält. ☐

Frage: Wie sieht ein Nichtstandardmodell der Arithmetik aus?

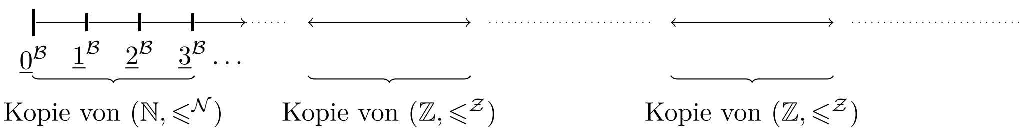
Antwort: Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandardmodell der Arithmetik, d.h.: $\mathcal{B} \equiv \mathcal{N}$ und $\mathcal{B} \ncong \mathcal{N}$. Dann gilt:

- $\leqslant^{\mathcal{B}}$ ist eine diskrete lineare Ordnung auf B, die ein kleinstes aber kein größtes Element besitzt,
- $0^{\mathcal{B}}$ ist das kleinste Element dieser linearen Ordnung,

(denn: jede dieser Aussagen lässt sich durch einen $\text{FO}[\sigma_{\text{Ar}}]$-Satz beschreiben, der von $\mathcal{N}$ erfüllt wird). Außerdem erfüllt $\mathcal{B}$ die folgenden Sätze aus $\text{Th}(\mathcal{N})$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\underline{n}$ dabei der im Beweis von Satz 2.21 definierte σ_{Ar}-Term):

- $\forall x\ \underline{0} \leqslant x$,
- $\forall x\ (\underline{0} = x\ \vee\ \underline{1} \leqslant x)$,
- $\forall x\ (\underline{0} = x\ \vee\ \underline{1} = x\ \vee\ \underline{2} \leqslant x)$,
- $\forall x\ (\underline{0} = x\ \vee\ \underline{1} = x\ \vee\ \underline{2} = x\ \vee\ \underline{3} \leqslant x)$,
- usw.

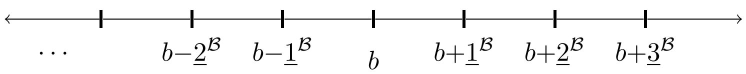
Die Ordnung $\leqslant^{\mathcal{B}}$ besteht damit aus einer Kopie von $(\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, gefolgt von Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.



Außerdem erfüllt $\mathcal{B}$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ die beiden folgenden FO[σ_{Ar}]-Sätze, die zu Th($\mathcal{N}$) gehören:

- $\underline{m} + \underline{n} \ = \ \underline{m{+}n}$,
- $\underline{m} \times \underline{n} \ = \ \underline{m \cdot n}$.

Daraus folgt, dass $\mathcal{N}$ isormorph ist zu der Einschränkung von $\mathcal{B}$ auf die Menge $\{\underline{n}^{\mathcal{B}} : n \in \mathbb{N}\}$. Außerdem gilt: Ist $b \in B$ ein Element, das in einer der Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegt, so sieht diese Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ folgendermaßen aus:



Daher gilt: das Element $(b +^{\mathcal{B}} b)$ muss in einer **anderen** Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegen. Analog folgt: für jedes $b^{(i)} := \underbrace{b +^{\mathcal{B}} \ldots +^{\mathcal{B}} b}_{i\text{-mal, für } i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ muss es eine neue Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ geben.

Man kann auch zeigen, dass zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathcal{B}$ eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ liegen muss.

2.4 Literaturhinweise

Zur weiterführenden Lektür werden das Kapitel 6 in [EFT98], sowie der Artikel [Ott11] von Martin Otto empfohlen.

2.5 Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1.
Geben Sie eine Signatur σ und eine Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ an, so das Φ erfüllbar ist, aber kein abzählbares Modell hat.

Aufgabe 2.2.
Beweisen Sie Bemerkung 2.17, das heißt zeigen Sie Folgendes: Sei σ eine beliebige Signatur und sei $\mathcal{A}$ eine beliebige σ-Struktur. Dann gilt:

(a) Ist $\mathcal{A}$ endlich, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$: $\quad \mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

(b) Ist $\mathcal{A}$ unendlich, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \ncong \mathcal{A}$.

Hinweis: Für (b) können Sie den aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem benutzen. Für (a) können Sie folgendermaßen vorgehen: Nutzen Sie Aufgabe 0.3, um zu zeigen, dass (a) für *endliche* Signaturen gilt. Folgern Sie daraus, dass für *beliebige* Signaturen gilt: Falls $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, so ist $|B| = |A|$. Folgern Sie daraus, dass (a) für abzählbare Signaturen gilt. Folgern Sie dann, dass (a) auch für beliebige Signaturen gilt.

Aufgabe 2.3.
Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht. Zeigen Sie:

(a) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist axiomatisierbar.

(b) Die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen ist nicht endlich axiomatisierbar.

(c) Die Klasse aller endlichen azyklischen Graphen ist nicht axiomatisierbar.

Zur Erinnerung: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls er keinen Kreis endlicher Länge besitzt.

Aufgabe 2.4.
Geben Sie einen FO[$\leqslant$]-Satz δ an, so dass für alle $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \delta \quad \iff \quad \begin{array}{l}\mathcal{A} \text{ ist eine diskrete lineare Ordnung, die ein kleinstes,} \\ \text{aber kein größtes Element besitzt.}\end{array}$$

Aufgabe 2.5.
Sei $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathcal{N}})$, und sei $\mathcal{B}$ die $\{\leqslant\}$-Struktur mit Universum

$$B \; := \; \big(\{0\} \times \mathbb{N}\big) \cup \big(\{1\} \times \mathbb{Z}\big)$$

und Relation

$$\leqslant^{\mathcal{B}} \; := \; \big\{\big((i,j),(i',j')\big) \in B \times B \; : \; i < i' \text{ oder } \big(i = i' \text{ und } j \leqslant j'\big)\big\}.$$

Sind die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ elementar äquivalent? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.
Hinweis: Sie können Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele benutzen.

Aufgabe 2.6.
Sei $\mathcal{B}$ ein Nichtstandard-Modell der Arithmetik.
Zeigen Sie: Zwischen je zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$ in $\mathcal{B}$ liegt eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathcal{Z}})$.

Literaturverzeichnis

[DPPD09] Doxiaidis, A., C. H. Papadimitriou, A. Papadatos und A. Di Donna: *Logicomix: An Epic Search for Truth*. Bloomsbury USA, 2009. Siehe http://www.logicomix.com/en/.

[EFT98] Ebbinghaus, H.-D., J. Flum und W. Thomas: *Einführung in die Mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 1998.

[HHI+07] Halpern, Joseph Y., Robert Harper, Neil Immerman, Phokion G. Kolaitis, Moshe Y. Vardi und Victor Vianu: *On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science*. The Bulletin of Symbolic Logic, 7(2):S. 213–236, Juni 2007. URL: http://www.math.ucla.edu/%7Easl/bsl/0702/0702-003.ps.

[Lib04] Libkin, L.: *Elements of Finite Model Theory*. Springer-Verlag, 2004.

[Ott11] Otto, Martin: *Model theoretic methods for fragments of FO and special classes of (finite) structures*. In: J. Esparza, C. Michaux, C. Steinhorn (Herausgeber): *Finite and Algorithmic Model Theory*, Band 379 der Reihe *LMS Lecture Notes Series*, Seiten 271–341. Cambridge University Press, 2011. Eine Vorabversion ist verfügbar unter http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~otto/papers/durham.ps.

[Sch07] Schwentick, Thomas: *Logik für Informatiker, Skript zur Vorlesung*. Fakultät für Informatik, Technische Universität Dortmund, 2007.

[Sch16a] Schweikardt, Nicole: *Einführung in die Datenbanktheorie, Skript-Fragmente zur Vorlesung*. Institut für Informatik, Humboldt-Universität zu Berlin, Version vom 10. Februar 2016, 2016. Siehe https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS15-16/DBTheorie/.

[Sch16b] Schweikardt, Nicole: *Logik in der Informatik, Skript zur Vorlesung*. Institut für Informatik, Humboldt-Universität zu Berlin, Version vom 9. Februar 2016, 2016. Siehe https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS15-16/Logik/.