

# Beweistechniken

Vorlesung Logik in der Informatik, HU Berlin

1. Übungsstunde

# Was darf in einem Beweis verwendet werden?

- ▶ die Voraussetzungen des Satzes
- ▶ Definitionen und bereits bekannte Tatsachen und Sätze
- ▶ im Beweis selbst oder anderswo bereits als wahr bewiesene Aussagen
- ▶ logische Schlussregeln

# Und was ist verboten?

- ▶ unzulässiges Argumentieren mit Beispielen
- ▶ Verwendung gleicher Symbole zur Bezeichnung verschiedener Dinge
- ▶ Hantieren mit nicht exakt oder gar widersprüchlich definierten Begriffsbildungen
- ▶ unzulässige Gedankensprünge beim Schlussfolgern
- ▶ Ausnutzung von bis dahin noch unbewiesenen Behauptungen zur Begründung von einzelnen Beweisschritten

# Hilfreiche Beweistechniken

- ▶ direkter Beweis
- ▶ Beweis durch Kontraposition
- ▶ Beweis durch Widerspruch
- ▶ Beweis durch vollständige Induktion
  - ▶ ... über die natürlichen Zahlen
  - ▶ ... über rekursiv definierte Mengen

# Direkter Beweis

## Ansatz:

Die Behauptung wird “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

# Direkter Beweis

## Ansatz:

Die Behauptung wird “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

**Notation/Erinnerung:** Sei  $\varphi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ . Wir schreiben  
 $\mathcal{I} \models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$       und       $\mathcal{I} \not\models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$ .

# Direkter Beweis

## Ansatz:

Die Behauptung wird “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

**Notation/Erinnerung:** Sei  $\varphi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ . Wir schreiben  $\mathcal{I} \models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$  und  $\mathcal{I} \not\models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$ .

**Behauptung 1:** Für alle  $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \iff \mathcal{I} \models ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$$

# Direkter Beweis

## Ansatz:

Die Behauptung wird “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

**Notation/Erinnerung:** Sei  $\varphi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ . Wir schreiben  $\mathcal{I} \models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$  und  $\mathcal{I} \not\models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$ .

**Behauptung 1:** Für alle  $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \iff \mathcal{I} \models ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$$

**Behauptung 2:** Für alle  $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \iff \mathcal{I} \models ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$$



## Direkter Beweis

### Ansatz:

Die Behauptung wird “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

**Notation/Erinnerung:** Sei  $\varphi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ . Wir schreiben  $\mathcal{I} \models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 1$  und  $\mathcal{I} \not\models \varphi$ , falls  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}} = 0$ .

**Behauptung 1:** Für alle  $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \iff \mathcal{I} \models ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$$

**Behauptung 2:** Für alle  $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$  und  $\mathcal{I} : \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt:

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \iff \mathcal{I} \models ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$$

**Behauptung 3:**

Es gilt für jede Formel  $\varphi \in \text{AL}$ :

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff \neg\varphi \text{ ist nicht allgemeingültig.}$$

# Beweis durch Kontraposition

Seien  $V$  und  $A$  beliebige Aussagen. Dann gilt:

“Falls  $V$  gilt, so auch  $A$ ” ist wahr.

$\Leftrightarrow$  “ $A$  gilt oder  $V$  gilt nicht” ist wahr.

$\Leftrightarrow$  “Falls  $A$  nicht gilt, so gilt auch  $V$  nicht” ist wahr.

## Beweis durch Kontraposition

Seien  $V$  und  $A$  beliebige Aussagen. Dann gilt:

“Falls  $V$  gilt, so auch  $A$ ” ist wahr.

$\Leftrightarrow$  “ $A$  gilt oder  $V$  gilt nicht” ist wahr.

$\Leftrightarrow$  “Falls  $A$  nicht gilt, so gilt auch  $V$  nicht” ist wahr.

**Ansatz:** Beweise einen Satz der Form

“Falls  $V$  gilt, so auch  $A$ .”

dadurch, zu zeigen dass folgendes gilt:

“Falls  $A$  nicht gilt, so kann auch  $V$  nicht gelten.”

## Beweis durch Kontraposition

Seien  $V$  und  $A$  beliebige Aussagen. Dann gilt:

“Falls  $V$  gilt, so auch  $A$ ” ist wahr.

$\Leftrightarrow$  “ $A$  gilt oder  $V$  gilt nicht” ist wahr.

$\Leftrightarrow$  “Falls  $A$  nicht gilt, so gilt auch  $V$  nicht” ist wahr.

**Ansatz:** Beweise einen Satz der Form

“Falls  $V$  gilt, so auch  $A$ .”

dadurch, zu zeigen dass folgendes gilt:

“Falls  $A$  nicht gilt, so kann auch  $V$  nicht gelten.”

**Behauptung:** Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und seien  $M_1, \dots, M_n$  endliche Mengen.  
 Dann gilt für jedes  $k \in \mathbb{N}$ : Falls

$$|M_1| + \dots + |M_n| > k,$$

so existiert eine Menge  $M \in \{M_1, \dots, M_n\}$  mit  $|M| > \frac{k}{n}$ .

# Beweis durch Widerspruch

Ziel:

Beweise einen Satz der Form

Falls die Voraussetzungen  $V$  erfüllt sind, so gilt auch Aussage  $A$ .

# Beweis durch Widerspruch

Ziel:

Beweise einen Satz der Form

Falls die Voraussetzungen  $V$  erfüllt sind, so gilt auch Aussage  $A$ .

Ansatz:

1. Nimm an, dass die Voraussetzungen  $V$  erfüllt sind, jedoch die Aussage  $A$  nicht gilt.
2. Leite daraus einen Widerspruch her.

# Beweis durch Widerspruch

Ziel:

Beweise einen Satz der Form

Falls die Voraussetzungen  $V$  erfüllt sind, so gilt auch Aussage  $A$ .

Ansatz:

1. Nimm an, dass die Voraussetzungen  $V$  erfüllt sind, jedoch die Aussage  $A$  nicht gilt.
2. Leite daraus einen Widerspruch her.

Behauptung:

Sei  $\psi$  eine aussagenlogische Formel.

*Falls  $\varphi := (\psi \wedge \neg\psi)$ , dann*

*gibt es keine Interpretation  $\mathcal{I} : AS \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $\mathcal{I} \models \varphi$ .*

## Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  eine Aussage über die Zahl  $n$ .

**Ziel:** Zeige, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(n)$  gilt.



## Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  eine Aussage über die Zahl  $n$ .

**Ziel:** Zeige, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(n)$  gilt.

**Ansatz:** Nutze das **Induktionsprinzip**:

**Induktionsanfang:**

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

**Induktionsschritt:**

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $\underbrace{A(0), \dots, A(n)}_{\text{Induktionsannahme}}$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

# Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $A(0), \dots, A(n)$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

Dann gilt:

$A(0)$  ist wahr gemäß Induktionsanfang.

## Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $A(0), \dots, A(n)$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

Dann gilt:

$A(0)$  ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$  ist wahr da  $A(0)$  gilt und wegen dem Induktionsschritt für  $n = 0$ .

# Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $A(0), \dots, A(n)$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

Dann gilt:

$A(0)$  ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$  ist wahr da  $A(0)$  gilt und wegen dem Induktionsschritt für  $n = 0$ .

$A(2)$  ist wahr da  $A(0)$  und  $A(1)$  gelten  
und wegen dem Induktionsschritt für  $n = 1$ .

# Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $A(0), \dots, A(n)$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

Dann gilt:

$A(0)$  ist wahr gemäß **Induktionsanfang**.

$A(1)$  ist wahr da  $A(0)$  gilt und wegen dem **Induktionsschritt für  $n = 0$** .

$A(2)$  ist wahr da  $A(0)$  und  $A(1)$  gelten  
und wegen dem **Induktionsschritt für  $n = 1$** .

$A(3)$  ist wahr da  $A(0)$ ,  $A(1)$  und  $A(2)$  gelten  
und wegen dem **Induktionsschritt für  $n = 2$** .

## Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $A(0), \dots, A(n)$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

Dann gilt:

$A(0)$  ist wahr gemäß **Induktionsanfang**.

$A(1)$  ist wahr da  $A(0)$  gilt und wegen dem **Induktionsschritt** für  $n = 0$ .

$A(2)$  ist wahr da  $A(0)$  und  $A(1)$  gelten  
und wegen dem **Induktionsschritt** für  $n = 1$ .

$A(3)$  ist wahr da  $A(0), A(1)$  und  $A(2)$  gelten  
und wegen dem **Induktionsschritt** für  $n = 2$ .

$A(4)$  ...

... und so weiter.

## Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$ : Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass  $A(n)$  für die Zahl  $n = 0$  gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

Falls  $A(0), \dots, A(n)$  gelten, so auch  $A(n+1)$ .

Dann gilt:

$A(0)$  ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$  ist wahr da  $A(0)$  gilt und wegen dem Induktionsschritt für  $n = 0$ .

$A(2)$  ist wahr da  $A(0)$  und  $A(1)$  gelten  
und wegen dem Induktionsschritt für  $n = 1$ .

$A(3)$  ist wahr da  $A(0), A(1)$  und  $A(2)$  gelten  
und wegen dem Induktionsschritt für  $n = 2$ .

$A(4)$  ...

... und so weiter.

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt also:

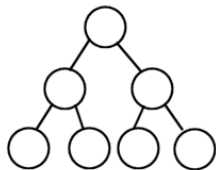
$A(n+1)$  ist wahr da  $A(0), \dots, A(n)$  gelten  
und wegen dem Induktionsschritt für  $n$ .

# Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$

## Aufgabe 1

Zeige, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$



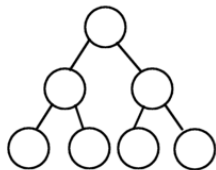


# Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$

## Aufgabe 1

Zeige, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$



## Aufgabe 2

Zeige, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \geq -1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 1$  gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

# Rekursive Definition von Mengen

Eine rekursive Definition einer Menge  $M$  besteht aus:

Basisregeln der Form " $m \in M$ " und

# Rekursive Definition von Mengen

Eine rekursive Definition einer Menge  $M$  besteht aus:

Basisregeln der Form " $m \in M$ " und

Rekursiven Regeln der Form

“Sind  $m_1, \dots, m_k \in M$ , dann ist auch  $m \in M$ ”,  
wobei  $m$  von  $m_1, \dots, m_k$  abhängt.

## Rekursive Definition von Mengen

Die Menge  $L$  aller Zeichenketten über dem Alphabet

$$A := \{\mathbf{x}, :=, +, -, \neq, ;, \mathbf{while}, \mathbf{do}, \mathbf{end}\} \cup \mathbb{N},$$

die syntaktisch korrekte **WHILE-Programme** sind, ist wie folgt definiert:

# Rekursive Definition von Mengen

Die Menge  $L$  aller Zeichenketten über dem Alphabet

$$A := \{\mathbf{x}, :=, +, -, \neq, ;, \mathbf{while}, \mathbf{do}, \mathbf{end}\} \cup \mathbb{N},$$

die syntaktisch korrekte **WHILE-Programme** sind, ist wie folgt definiert:

Basisregeln:

(B1) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j + c \in L$ .

(B2) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:  $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j - c \in L$ .

## Rekursive Definition von Mengen

Die Menge  $L$  aller Zeichenketten über dem Alphabet

$$A := \{x, :=, +, -, \neq, ;, \mathbf{while}, \mathbf{do}, \mathbf{end}\} \cup \mathbb{N},$$

die syntaktisch korrekte **WHILE-Programme** sind, ist wie folgt definiert:

Basisregeln:

(B1) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:  $xi := xj + c \in L$ .

(B2) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:  $xi := xj - c \in L$ .

Rekursive Regeln:

(R1) Sind  $w_1 \in L$  und  $w_2 \in L$ , so ist auch  $w_1; w_2 \in L$ .

(R2) Ist  $w \in L$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so ist  $\mathbf{while } xi \neq 0 \mathbf{ do } w \mathbf{ end} \in L$ .

# Rekursive Definition von Mengen

*Zur Erinnerung: Definition von  $L$ :*

*Basisregeln:*

(B1) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:

$$xi := xj + c \in L.$$

(B2) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:

$$xi := xj - c \in L.$$

*Rekursive Regeln:*

(R1) Sind  $w_1 \in L$  und  $w_2 \in L$ , so ist auch

$$w_1; w_2 \in L.$$

(R2) Ist  $w \in L$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\mathbf{while\ } xi \neq 0 \mathbf{\ do\ } w \mathbf{\ end} \in L.$$

## Aufgabe 3:

Welche der folgenden Zeichenketten gehört zur Menge  $L$  aller syntaktisch korrekten WHILE-Programme, welche nicht?

(1)  $x3 := x7 - 2$

(2)  $x3 := 1; x2 := x3 + 5$

(3) **while**  $x1 \neq 0$  **do**  $x0 := x0 + 1; x1 := x1 - 1$  **end**

(4)  $x1 := x1 + 42; \mathbf{while\ } x1 \neq 0 \mathbf{\ do\ } x1 := x1 - 1$

# Rekursive Definition von Funktionen

Sei  $M$  eine **rekursiv definierte** Menge und sei  $P$  eine beliebige Menge.

Die rekursive Definition einer Funktion  $f: M \rightarrow P$  sieht folgendermaßen aus:



# Rekursive Definition von Funktionen

Sei  $M$  eine **rekursiv definierte** Menge und sei  $P$  eine beliebige Menge.

Die rekursive Definition einer Funktion  $f: M \rightarrow P$  sieht folgendermaßen aus:

**Rekursionsanfang:**

Für jede Basisregel der Form " $m \in M$ " in der Definition von  $M$ , definiere  $f(m) \in P$ .

# Rekursive Definition von Funktionen

Sei  $M$  eine **rekursiv definierte** Menge und sei  $P$  eine beliebige Menge.

Die rekursive Definition einer Funktion  $f: M \rightarrow P$  sieht folgendermaßen aus:

**Rekursionsanfang:**

Für jede Basisregel der Form " $m \in M$ " in der Definition von  $M$ , definiere  $f(m) \in P$ .

**Rekursionsschritt:**

Für jede rekursive Regel der Form

"Sind  $m_1, \dots, m_k \in M$ , dann ist auch  $m \in M$ "

in der Definition von  $M$ , definiere  $f(m) \in P$  aus  $f(m_1), \dots, f(m_k)$ .

# Rekursive Definition von Funktionen

*Zur Erinnerung: Definition von  $L$ :*

*Basisregeln:*

*(B1) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:*

$xi := xj + c \in L.$

*(B2) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:*

$xi := xj - c \in L.$

*Rekursive Regeln:*

*(R1) Sind  $w_1 \in L$  und  $w_2 \in L$ , so ist auch*

$w_1; w_2 \in L.$

*(R2) Ist  $w \in L$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so ist*

**$while\ xi \neq 0\ do\ w\ end \in L.$**

## Aufgabe 4:

Definiere Funktionen  $f: L \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g: L \rightarrow \mathbb{N}$  rekursiv, so dass für alle  $w \in L$  gilt:

$f(w) :=$  Anzahl der “:=” in  $w$ ,

$g(w) :=$  Anzahl der “;” in  $w$ .

# Rekursive Definition von Funktionen

*Zur Erinnerung: Definition von L:*

*Basisregeln:*

(B1) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:

$$xi := xj + c \in L.$$

(B2) Für Zahlen  $i, j, c \in \mathbb{N}$  gilt:

$$xi := xj - c \in L.$$

*Rekursive Regeln:*

(R1) Sind  $w_1 \in L$  und  $w_2 \in L$ , so ist auch

$$w_1; w_2 \in L.$$

(R2) Ist  $w \in L$  und  $i \in \mathbb{N}$ , so ist

$$\text{while } xi \neq 0 \text{ do } w \text{ end} \in L.$$

## Aufgabe 4:

Definiere Funktionen  $f: L \rightarrow \mathbb{N}$  und  $g: L \rightarrow \mathbb{N}$  rekursiv, so dass für alle  $w \in L$  gilt:

$$f(w) := \text{Anzahl der " := " in } w,$$

$$g(w) := \text{Anzahl der ";" in } w.$$

## Aufgabe 5:

Zeige, dass für alle  $w \in L$  gilt:

$$f(w) = g(w) + 1.$$

# Rekursive Definition von Funktionen

## Notation:

Für eine Menge  $M$  schreiben wir  $2^M$  oder  $\mathcal{P}(M)$  um die Potenzmenge von  $M$  zu bezeichnen, d.h. die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

## Aufgabe 6:

Gib die rekursive Definition einer Funktion  $as: AL \rightarrow \mathcal{P}(AS)$  an, so dass für alle  $\varphi \in AL$  gilt:

$$as(\varphi) = \{X : X \text{ ist ein Aussagensymbol, das in } \varphi \text{ vorkommt}\}.$$

## Rekursive Definition von Funktionen

### Notation:

Für eine Menge  $M$  schreiben wir  $2^M$  oder  $\mathcal{P}(M)$  um die Potenzmenge von  $M$  zu bezeichnen, d.h. die Menge aller Teilmengen von  $M$ .

### Aufgabe 6:

Gib die rekursive Definition einer Funktion  $as: AL \rightarrow \mathcal{P}(AL)$  an, so dass für alle  $\varphi \in AL$  gilt:

$$as(\varphi) = \{X : X \text{ ist ein Aussagensymbol, das in } \varphi \text{ vorkommt}\}.$$

### Aufgabe 7:

(“Koinzidenzlemma für AL”)

Zeige, dass für alle  $\varphi \in AL$  gilt:

Sind  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2: AS \rightarrow \{0, 1\}$  Interpretationen mit

$$\mathcal{I}_1(X) = \mathcal{I}_2(X) \quad \text{für alle } X \in as(\varphi),$$

dann ist  $\llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}_1} = \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathcal{I}_2}$ .