Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

19. Januar 2024

Logik in der Informatik

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 12

Abgabe: *bis 29. Januar 2024, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 12 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Zeigen Sie, dass die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen erststufig axiomatisierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe um zu zeigen, dass die Klasse aller *nicht* azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen *nicht* erststufig axiomatisierbar ist.

Hinweis: Ein gerichteter Graph ist azyklisch, falls es kein $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und keine Knoten $a_1, \ldots, a_\ell$ gibt, sodass (a_ℓ, a_1) und (a_i, a_{i+1}) für alle $i \in [\ell - 1]$ Kanten im Graphen bilden.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Seien $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, wobei σ eine Signatur ist, die ein 2-stelliges Relationssymbol E enthält. Seien x und y zwei verschiedene Variablen. Leiten Sie ähnlich wie in Beispiel 4.19 aus dem Skript die folgenden beiden Sequenzen im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ab.

- **(i)** $\varphi \ \vdash \ \neg\neg\varphi$
- **(ii)** $\varphi, (\neg\varphi \vee \psi) \ \vdash \ \psi$

(b) Sei $\sigma := \{E, f\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Relationssymbol E und dem 1-stelligen Funktionssymbol f besteht. Betrachten Sie das Alphabet $A := A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ und die Menge $M := A^*$.

Geben Sie einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über der Menge M an, so dass gilt: $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{FO}[\sigma]$. D.h. $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}$ soll aus genau denjenigen Elementen von M bestehen, die gemäß Definition 3.15 syntaktisch korrekte Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ sind.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

(c) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und $\sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol $\leqslant$ und den zwei 1-stelligen Relationssymbolen P_a und P_b.

Definition: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist *erststufig axiomatisierbar*, falls es eine (möglicherweise unendliche) Menge Φ von $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Sätzen gibt, sodass für alle nicht-leeren Worte $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \Phi$$

Zur Erinnerung: $\mathcal{A}_w$ ist die zu w gehörende Wortstruktur.

Zeigen Sie, dass die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, die durch den regulären Ausdruck $(aa)^*$ beschrieben wird, erststufig axiomatisierbar ist.

Hinweis: Versuchen Sie zunächst, Sprachen der Form $\Sigma^* \setminus \{u\}$ mit $u \in \Sigma^*$ zu axiomatisieren.

Beachte: Man kann sogar zeigen, dass jede beliebige Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ erststufig axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4:

Bearbeiten Sie Aufgabe 4 von Blatt 11.