

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2023/2024

## Übungsblatt 6

**Abgabe:** bis 4. Dezember 2023, 13.00 Uhr

### Aufgabe 1:

(Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 6 auf der Moodle-Plattform.

### Aufgabe 2:

(Präsenzaufgabe)

(a) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die beiden folgenden Aussagen.

(i) Es gibt eine Formel  $\varphi \in \text{AL}$ , die zu keiner Hornformel äquivalent ist.

(ii) Es gibt eine Formel  $\varphi \in \text{AL}$ , die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist.

(b) Seien  $P, Q, R, S, T, U$  unterschiedliche Aussagensymbole aus  $\text{AS}$ . Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmengemenge  $\Gamma$  an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht.

$$\Gamma := \left\{ \{\neg P, R, S\}, \{\neg Q, U, S\}, \{\neg Q, \neg U, \neg R\}, \{\neg S, \neg Q\}, \{Q, \neg R, \neg P\}, \{P\}, \right. \\ \left. \{Q, U, R\}, \{Q, \neg U, \neg S\}, \{P, T\}, \{P, U\}, \{\neg U, R, \neg T\}, \{P, \neg R, \neg T\} \right\}$$

*Hinweise zum Vorgehen:*

- Wählen Sie bitte in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus positive Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge.
- Wählen Sie bitte bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge.
- Geben Sie wie in Beispiel 2.63 die entstehende Klauselmengemenge (ohne gestrichene Klauseln) und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.

(c) Sei  $\sigma = \{f, R, S, c\}$  die Signatur mit dem 1-stelligen Funktionssymbol  $f$ , dem 2-stelligen Relationssymbol  $R$ , dem 3-stelligen Relationssymbol  $S$  und dem Konstantensymbol  $c$ . Betrachten Sie die drei  $\sigma$ -Strukturen  $\mathcal{A} := (A, f^A, R^A, S^A, c^A)$ ,  $\mathcal{B} := (B, f^B, R^B, S^B, c^B)$  und  $\mathcal{C} := (C, f^C, R^C, S^C, c^C)$  wobei

- $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $R^A := \{(3, 3), (5, 4), (1, 1)\}$ ,  $S^A := \{(2, 2, 4), (5, 3, 1)\}$ ,  $c^A := 2$
- $B := \{u, v, w, y, z\}$ ,  $R^B := \{(u, u), (v, v), (z, y)\}$ ,  $S^B := \{(w, w, y), (z, u, v)\}$ ,  $c^B := w$
- $C := \{\square, \square, \square, \square, \square\}$ ,  $R^C := \{(\square, \square), (\square, \square), (\square, \square)\}$ ,  $S^C := \{(\square, \square, \square), (\square, \square, \square)\}$ ,  $c^C := \square$

und die Funktionen  $f^A: A \rightarrow A$ ,  $f^B: B \rightarrow B$  und  $f^C: C \rightarrow C$  definiert sind durch

$x$	1	2	3	4	5	$x$	$u$	$v$	$w$	$y$	$z$	$x$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
$f^A(x)$	2	1	2	5	4	$f^B(x)$	$z$	$w$	$v$	$u$	$y$	$f^C(x)$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$

Überprüfen Sie jeweils, ob  $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$  und ob  $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$  gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

### Aufgabe 3:

(40 Punkte)

- (a) Formen Sie folgende Formel  $\varphi$  in eine passende Eingabeklauselmengemenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi := \neg P \wedge ((Q \wedge P) \rightarrow S) \wedge (\mathbf{1} \rightarrow Q) \wedge (R \vee \neg Q) \wedge ((W \wedge Q \wedge R) \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{0} \rightarrow W)$$

- (b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmengemenge  $\Gamma$  an:

$$\Gamma := \{ \{P\}, \{Q\}, \{\neg S, T\}, \{R\}, \{\neg Q, \neg S\}, \{\neg Q, \neg R, T\}, \{\neg T, \neg W, S\}, \{\neg Q, \neg P, W\} \}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.65 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklauseln mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

- (c) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmengemenge  $\Gamma$  aus Teilaufgabe 2(b) bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Betrachten Sie die Relation  $R := \{(a, b), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$  über der Menge  $A := \{a, b, c, d\}$ . Welche Paare  $(x, y) \in A \times A$  müssen zu  $R$  mindestens hinzugefügt werden, um aus  $R$  eine Relation zu erhalten, die jeweils

- (i) reflexiv ist?                      (iii) antisymmetrisch ist?                      (v) transitiv ist?  
(ii) symmetrisch ist?                      (iv) konnex ist?

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

- (e) Wir betrachten das Alphabet  $\Sigma := \{D, E, F, L, M, O, R\}$ .

- (i) Geben Sie die Wortstruktur  $\mathcal{A}_w$  für das Wort  $w := \text{MODELL} \in \Sigma^*$  an.
- (ii) Sei  $\mathcal{B}$  die  $\sigma_\Sigma$ -Struktur mit dem Universum  $B := [6]$ , in der  $\leq^{\mathcal{B}}$  die natürliche lineare Ordnung auf  $[6]$  ist und  $P_D^{\mathcal{B}} := \emptyset$ ,  $P_E^{\mathcal{B}} := \{5\}$ ,  $P_F^{\mathcal{B}} := \{1\}$ ,  $P_L^{\mathcal{B}} := \{6\}$ ,  $P_M^{\mathcal{B}} := \{4\}$ ,  $P_O^{\mathcal{B}} := \{2\}$ , und  $P_R^{\mathcal{B}} := \{3\}$ . Welches Wort  $w' \in \Sigma^*$  wird durch  $\mathcal{B}$  repräsentiert?

#### Aufgabe 4:

(20 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

**Achtung:** Fertigen Sie Ihre Lösung für Aufgabenteil (a) auf einem Zettel an. Die Lösung der Aufgabenteile (b) und (c) muss unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise für Prolog-Code (in einer Datei für beide Aufgabenteile zusammen) in einem extra-Abgabefach bei Moodle eingereicht werden!

- (a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

`?- append([1,2],[3],X).`

- (b) Binärbäume seien wie in der dritten Prolog-Übungsstunde definiert (vgl. die Folie zum Spiegeln von Binärbäumen auf der Website zur Prolog-Übung). Beispielsweise wird der linke dort abgebildete Binärbaum  $\mathcal{B}$  repräsentiert durch den folgenden Prolog-Term:

`B := tree(tree(leaf(1),tree(leaf(2),leaf(3))),leaf(4))`

Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass die Anfrage `?- label(B, X).` für eine Repräsentation  $B$  eines Binärbaums  $\mathcal{B}$  und einen Prolog-Term  $X$  genau dann erfüllt ist, wenn  $X$  die Beschriftung eines Blattes von  $\mathcal{B}$  ist.

Für unseren Baum  $\mathcal{B}$  soll beispielsweise die Anfrage

`?- label(B, X).`

die Antworten

`X = 1; X = 2; X = 3; X = 4.`

liefern.

- (c) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass die Anfrage `?- labels(B, Y).` für eine Repräsentation  $B$  eines Binärbaums und eine Liste  $Y$  von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn  $Y$  eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter des repräsentierten Binärbaums  $\mathcal{B}$  ist; und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

Für unseren Baum  $\mathcal{B}$  soll beispielsweise die Anfrage

`?- labels(B, Y).`

die Antwort

`Y = [1, 2, 3, 4].`

liefern.

*Hinweis:* Benutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `append/3`.