Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. Oktober 2023

Logik in der Informatik

Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 6. November 2023, 13.^{00} Uhr*

Aufgabe 1: (Moodle-Quiz)

Absolvieren Sie das Quiz 2 auf der Moodle-Plattform.

Aufgabe 2: (Präsenzaufgabe)

Der Rechenzentrenbetreiber *Contra-Bo* hat eine neue Anlage erworben, in der die Server in einem 42 mal 42 Einheiten großen Quadrat angeordnet sind. Jeder Server wird durch ein Paar $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in [42]$ identifiziert, welcher mit den Servern $\langle i-1, j\rangle$, $\langle i+1, j\rangle$, $\langle i, j-1\rangle$ und $\langle i, j+1\rangle$ benachbart ist. Hierbei haben Server am Rand der Fläche natürlich weniger als vier Nachbarn. Jeder Server soll für höchstens einen der Kunden ***B**luesky*, ***D**iaspora*, ***M**astodon* oder ***T**hreads* reserviert werden.

Für die Nutzungsplanung benutzt der Betreiber die Aussagensymbole $B_{i,j}$, $D_{i,j}$, $M_{i,j}$ und $T_{i,j}$ mit $i, j \in [42]$. Hierbei repräsentiert z. B. $D_{13,9}$ die Aussage: „Server $\langle 13, 9\rangle$ ist für Diaspora reserviert“. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert. Hierbei möchte der Betreiber folgende Bedingungen erfüllen.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass jeder Server tatsächlich nur für einen Kunden reserviert ist.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j\in\{2,\dots,41\}} \big((D_{i,j} \vee M_{i,j}) \to (\neg T_{i-1,j} \wedge \neg T_{i+1,j} \wedge \neg T_{i,j-1} \wedge \neg T_{i,j+1})\big)\ .$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Als Premium-Kunde sollten die Server von Threads besonders leicht zugänglich sein und daher am Rand liegen. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die besagt, dass alle für Threads reservierten Server am Rand liegen.

(d) Für manche Arbeiten ist es sinnvoll, Server von allen 4 Kunden in Reichweite zu haben. Deswegen soll es einen Server geben, sodass für jeden der 4 Kunden einer seiner Nachbarschaftsserver reserviert ist. Geben Sie eine Formel φ_4 an, die diese Bedingung repräsentiert.

Aufgabe 3: (40 Punkte)

(a) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \;:=\; \begin{cases} (A_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ ((A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$.

Es ist also bspw. $\varphi_1 = ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)$, $\varphi_2 = ((A_2 \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_4 = ((A_4 \leftrightarrow A_5) \leftrightarrow A_6)$, $\varphi_5 = ((A_5 \leftrightarrow A_6) \leftrightarrow A_7)$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_7)$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und beweisen Sie, dass $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

(b) Ist die folgende Behauptung korrekt?

Seien I und J beliebige endliche, nicht-leere Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine aussagenlogische Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Dann gilt

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \quad\equiv\quad \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ unendlich viele verschiedene aussagenlogische Formeln $\psi \in \mathsf{AL}$ gibt, für die gilt:

$$\varphi \models \psi$$

Aufgabe 4: (20 Punkte)

Arbeiten Sie Kapitel 2 des Buchs "Learn Prolog Now!" durch.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- **(i)** `donut` und `croissant`
- **(ii)** `tier(X)` und `tier(toto)`
- **(iii)** `Essen` und `'Essen'`
- **(iv)** `lecker` und `'lecker'`
- **(v)** `gut(pizza, Y)` und `gut(X, salami)`
- **(vi)** `f(a, X, Y)` und `f(X, Y, b)`
- **(vii)** `plus(sqr(a), X)` und `plus(sqr(Y), mult(b, Y))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe **4(b)** von Blatt **1**. Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- verfolgt(darth_vader, Y).
```