Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

31. Januar 2023

Diskrete Strukturen

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 13. Februar 2023, $10.^{00}$ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **($6 \cdot 5 + 10 = 40$ Punkte)**

(a) Sei Ω ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \subseteq \Omega$ Ereignisse mit $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ und $P(A \cap B) = 0{,}5$. Berechnen Sie:

(i) $P(A \cup B)$ **(iii)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ **(v)** $P(\overline{A} \cap B)$

(ii) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ **(iv)** $P(A \cap \overline{B})$ **(vi)** $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B))$

(b) Gegeben seien drei verschiedene positive ganze Zahlen a_1, a_2, a_3 und drei verschiedene negative ganze Zahlen b_1, b_2, b_3. Aus diesen sechs Zahlen ziehen wir, ohne Zurücklegen, zufällig zwei Zahlen und wetten darauf, ob deren Produkt positiv oder negativ ist.

Auf welches Ergebnis sollten Sie wetten, um Ihre Gewinnchancen zu maximieren? Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe die 3-Schritt-Methode.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **($15 + 2 \cdot 15 + 15 = 60$ Punkte)**

(a) Harald Töpfer steht vor dem finalen Rätsel auf seiner epischen Reise – der Suche nach dem sagenumwobenen Stein der Greise. Das Rätsel selbst ist (insbesondere nach dem dreiköpfigen Riesenhund und dem menschlichen Schachspiel) erstaunlich harmlos: Harald muss lediglich den korrekten Schlüssel aus den unzähligen herumschwirrenden geflügelten Schlüsseln finden. Da sich die Schlüssel nicht unterscheiden lassen, bleibt Harald nur stumpfes, zufälliges Ausprobieren.

Angenommen, es flattern n Schlüssel durch den Raum. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsvariable X, die die Anzahl ausprobierter Schlüssel bezeichnet, wenn Harald die Schlüssel nach dem Ausprobieren *nicht* wieder fliegen lässt, das heißt, er wird bereits getestete Schlüssel nicht noch einmal fangen und testen.

(b) Wir betrachten m Bälle und n Körbe. Jeden Ball werfen wir zufällig und unabhängig voneinander in die Körbe. Jeder Ball kann also mit gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ in jedem Korb landen. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Zufallsvariablen:

(i) X sei die Anzahl aller Bälle im *ersten* Korb.

(ii) Y sei die Anzahl aller Körbe mit *genau einem* Ball darin.

(c) In einem Berliner Wahlbüro zählen Hans und Franz die Stimmen aus. Dabei ist ihnen folgendes aufgefallen: Mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$ ist der Stimmzettel einwandfrei und kann gewertet werden. Umgekehrt gibt es jedoch mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{3}$ irgendeine Art von Formfehler und die Stimme ist ungültig. Hans und Franz wissen, dass die Wahl (erneut) wiederholt werden muss, wenn es am Ende nicht mindestens 100 gültige Stimmen *mehr* gibt als ungültige.

Geben Sie mittels der Tschebyscheff-Ungleichung eine Schätzung der Wahrscheinlichkeit darüber ab, ob die Wahl erneut wiederholt werden muss, wenn noch 500 Stimmen ausgezählt werden müssen und die gültigen Stimmen momentan gleichauf sind mit den ungültigen.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Präsenz

Ein Sortiment aus 20 Teilen gilt als „gut“, wenn es höchstens zwei defekte Teile enthält und als „schlecht“, wenn es mindestens vier defekte Teile enthält. Weder Käufer, noch Verkäufer wissen, ob das gegebene Sortiment gut oder schlecht ist. Deshalb beschließen Sie, vier zufällig herausgegriffene Teile zu testen. Nur wenn alle vier in Ordnung sind, findet der Kauf (des ganzen Sortiments) statt. Der Verkäufer trägt bei diesem Verfahren das Risiko, ein gutes Sortiment nicht zu verkaufen, der Käufer das Risiko, ein schlechtes Sortiment zu kaufen. Wer trägt das größere Risiko?

Aufgabe 4: Präsenz

Gegeben sei eine faire Münze, deren Wurf mit gleicher Wahrscheinlichkeit Kopf oder Zahl ergibt, und eine unfaire Münze, deren Wurf immer Kopf ergibt. Wir wählen eine der beiden Münzen zufällig aus und werfen sie zweimal. Angenommen, beide Würfe ergeben Kopf. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die unfaire Münze ausgewählt wurde? Wenden Sie zur Lösung die 3-Schritt-Methode an.

Aufgabe 5: Präsenz

Die folgende Frage hat der französische Edelmann De Méré an seinen Freund Pascal im 17. Jahrhundert gestellt: Wir würfeln dreimal und betrachten die Ereignisse A, dass die Summe der Augenzahlen 11 ist, und B, dass die Summe der Augenzahlen 12 ist. Sind diese beiden Ereignisse gleich wahrscheinlich?

Wenden Sie die 3-Schritt-Methode an, um die Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ zu bestimmen und De Mérés Frage zu beantworten.