Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. Januar 2023

Diskrete Strukturen

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 6v2

Abgabe: *bis 30. Januar 2023, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **($2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 10 = 60$ Punkte)**

(a) Seien A, B endliche, nicht-leere Mengen; sei $k := |A|$ und $n := |B|$.

(i) Wie viele injektive Funktionen von A nach B gibt es?

(ii) Wie viele surjektive Funktionen von A nach B gibt es?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ mit $n \geq 2$ und $S \subseteq \{1, \ldots, 2n\}$ mit $|S| = n + 1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gibt zwei Zahlen $a, b \in S$, sodass $b = a + 1$ gilt.

(ii) Es gibt zwei Zahlen $a, b \in S$, sodass $a + b = 2n + 1$ gilt.

(iii) Es gibt zwei ungleiche Zahlen $a, b \in S$, sodass a ein Teiler von b ist.

(c) Seien $k, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Zeigen Sie, dass $\prod_{i=n}^{n+k-1} i$ durch k teilbar ist.

Aufgabe 2: **($2 \cdot 10 + 10 + 10 = 40$ Punkte)**

(a) Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $k \leq n$ und sei $G_{n \times n}$ ein $(n \times n)$-Schachbrett, welches wir durch das $(n \times n)$ Gitter repräsentieren (siehe Übungsblatt 4). Wir haben eine große Anzahl von schwarzen Spielsteinen zur Verfügung, die alle gleich aussehen. Und wir haben eine große Anzahl von weißen Spielsteinen zur Verfügung, die alle gleich aussehen.

(i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, n schwarze Steine auf einem $(n \times n)$-Schachbrett zu platzieren, sodass in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Stein liegt?

(ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, $n-k$ schwarze und k weiße Steine so auf ein $(n \times n)$-Schachbrett zu stellen, dass keine zwei Steine in der gleichen Zeile oder Spalte stehen?

Begründen Sie jeweils, warum Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Bestimmen Sie die zu $k = 3$ und $\ell = 3$ gehörige Ramsey-Zahl $R(3, 3)$, d.h. die kleinste natürliche Zahl n, sodass für jeden ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq n$ gilt: G besitzt eine Clique der Größe 3 oder eine unabhängige Menge der Größe 3.

Um zu beweisen, dass die von Ihnen gefundene Zahl n kleinstmöglich ist, geben Sie einen konkreten Graphen mit $n-1$ Knoten an, in dem es weder ein Dreieck gibt, noch eine unabhängige Menge der Größe 3.

(c) Betrachten Sie den vollständigen Graphen K_6. *Sim* ist das folgendermaßen auf K_6 definierte Spiel:

Es spielen zwei Spieler:innen, *Ruth*, welche einen roten Buntstift verwendet, und *Bob*, welcher mit einem blauen Buntstift ausgestattet ist. Die beiden markieren nun abwechselnd mit ihrem Buntstift eine Kante in K_6, wobei Ruth beginnt. Eine Kante darf höchstens einmal markiert werden. Das Spiel endet, sobald eine:r der beiden ein einfarbiges Dreieck einzeichnet, das heißt, sobald drei rote oder drei blaue Kanten in K_6 einen Kreis bilden. Diese Person verliert das Spiel.

Ziel ist es demnach, Kanten einzufärben, ohne jemals ein einfarbiges Dreieck zu zeichnen. Die Anzahl der Züge des Spiels ist offensichtlich durch $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ beschränkt, da K_6 nur so viele Kanten besitzt.

Beweisen Sie, dass keine Partie des Spiels mit einem „Unentschieden“ enden kann.

Aufgabe 3: Präsenz

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $G_{n \times n}$ das $(n \times n)$-Gitter (siehe Übungsblatt **4**).

Betrachten Sie die Menge P aller Wege in $G_{n \times n}$, die in $(1,1)$ beginnen und in (n,n) enden, keinen Knoten unterhalb der Diagonalen besuchen und die in jedem „Schritt“ ausschließlich nach rechts oder nach unten wandern. Das heißt, P ist die Menge aller Wege $(v_1, \ldots, v_\ell)$ mit $v_1 = (1,1)$, $v_\ell = (n,n)$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$ gilt mit $v_i = (x,y)$, dass $x \leq y$ und entweder $v_{i+1} = (x{+}1, y)$ oder $v_{i+1} = (x, y{+}1)$.

Berechnen Sie $|P|$ und beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: Präsenz

(a) Wir sagen, dass eine endliche Menge gerade bzw. ungerade ist, falls sie eine gerade bzw. ungerade Anzahl an Elementen enthält. Zeigen Sie, dass jede endliche, nicht-leere Menge genau so viele gerade wie ungerade Teilmengen enthalten muss.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wie viele Wörter der Länge n können über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ gebildet werden, die ungerade viele a's enthalten?

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der durch 6, 8 oder 20 teilbaren natürlichen Zahlen kleiner gleich 200.