Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

20. Dezember 2022

Diskrete Strukturen

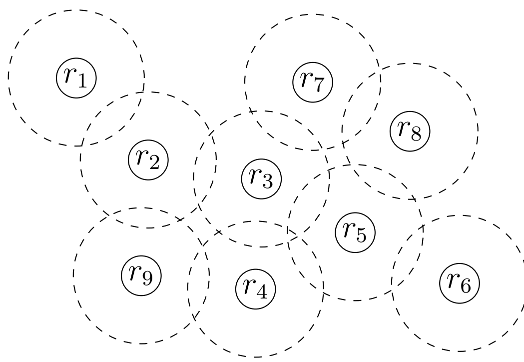
Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 16. Januar 2023, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **($10 + 10 + 5 + 15 + 15 = 55$ Punkte)**

(a) Es seien die Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ gegeben, denen jeweils eine Sendefrequenz zugeordnet werden soll. Radiostationen, die zu dicht beieinander liegen, dürfen allerdings nicht die gleiche Frequenz erhalten. Das nebenstehende Diagramm stellt die Lage der einzelnen Radiostationen dar. Um jede Station ist ein gestrichelter Kreis eingezeichnet, der die Reichweite einer Radiostation repräsentiert. Schneiden sich die Kreise von zwei Radiostationen r_i und r_j, so liegen r_i und r_j zu dicht beieinander und dürfen nicht die gleiche Frequenz zugeordnet bekommen.



(i) Geben Sie den Konfliktgraphen an, der als Knotenmenge die Radiostationen besitzt und bei dem eine Kante zwischen zwei Radiostationen r_i und r_j anzeigt, dass r_i und r_j nicht die gleiche Frequenz benutzen dürfen.

(ii) Sei $G = (V, E)$ der Konfliktgraph aus Aufgabenteil **(i)**. Geben Sie eine konfliktfreie Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ für G an, die möglichst wenige verschiedene Markierungen benutzt, das heißt, $|\,\mathrm{Bild}(m)|$ soll minimal sein.

(iii) Wie viele verschiedene Frequenzen werden für die Radiostationen $r_1, \ldots, r_9$ mindestens benötigt? Das heißt, wie groß ist die chromatische Zahl des Konfliktgraphen?

Begründen Sie für jede der Teilaufgaben **(i)** - **(iii)** Ihre Antwort.

(b) Ein ungerichteter endlicher Graph $G = (V, E)$ wird *kubisch* genannt, wenn für alle seine Knoten $v \in V$ gilt: $\mathrm{Grad}_G(v) = 3$.

(i) Geben Sie jeweils einen zusammenhängenden kubischen Graphen mit 4, 6 und 8 Knoten in graphischer Darstellung an.

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede gerade natürliche Zahl $n \geq 4$ ein zusammenhängender kubischer Graph mit n Knoten existiert.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 2: **($3 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 10 + 2 \cdot 5 = 45$ Punkte)**

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils:

(i) reflexiv ist? **(ii)** symmetrisch ist? **(iii)** antisymmetrisch ist?

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i für $i \in \{1,2\}$.

(i) $M_1 := \{1,2,3,4,5\}$, $R_1 := \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)\}$.

(ii) $M_2 := \{\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit\}$, $R_2 := \{(\clubsuit,\spadesuit),(\clubsuit,\heartsuit),(\clubsuit,\diamondsuit),(\spadesuit,\heartsuit),(\spadesuit,\diamondsuit),(\heartsuit,\diamondsuit)\}$.

Stellen Sie R_1 und R_2 durch einen gerichteten Graphen dar. Geben Sie für jedes $i \in \{1,2\}$ und für jede der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“, „antisymmetrisch“, „konnex“, „transitiv“ an, ob die Relation R_i diese Eigenschaft besitzt oder nicht.

(c) Für einen gerichteten Baum $B = (V,E)$ definieren wir die Relation

$$R_B := \{(x,y) \in V \times V : \text{es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \text{ in } B\}$$

(i) Beweisen Sie, dass R_B für jeden gerichteten Baum B eine partielle Ordnung ist.

(ii) Geben Sie gerichtete Bäume B_1 und B_2 mit jeweils mindestens 3 Knoten an, sodass

(1) R_{B_1} eine lineare Ordnung ist (2) R_{B_2} keine lineare Ordnung ist.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3: Präsenz

Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien 2^n Münzen gegeben, die wir im Folgenden mit $M_1, \dots, M_{2^n}$ bezeichnen. Alle Münzen bis auf eine sind gleich schwer; diese eine Münze ist etwas schwerer als jede einzelne andere Münze. Diese Münze lässt sich mithilfe einer Balkenwaage wie folgt finden:

1. Falls $n = 0$, ist die gesuchte Münze die einzige, die vorhanden ist.
2. Ansonsten vergleiche das Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $A := \{M_1, \dots, M_{2^{n-1}}\}$ mit dem Gesamtgewicht der Münzen aus der Menge $B := \{M_{2^{n-1}+1}, \dots, M_{2^n}\}$. Ist das Gesamtgewicht von A größer als das von B, muss sich die gesuchte Münze in A befinden und das beschriebene Verfahren wird rekursiv auf die Menge A angewendet, andernfalls wird es rekursiv auf die Menge B angewendet.

(a) Beschreiben Sie das Verfahren für $n = 2$ durch einen Entscheidungsbaum. Wählen Sie hierfür geeignete Kanten- und Knotenbeschriftungen.

(b) Ist der von Ihnen in Teilaufgabe **(a)** aufgestellte Entscheidungsbaum ein Binärbaum? Ist er ein vollständiger Binärbaum?

(c) Welchen Situationen im Entscheidungsprozess entsprechen die inneren Knoten des Baumes? Welcher Situation entspricht ein Blatt?

(d) Wie viele Wiegevorgänge müssen für 2^n Münzen mindestens durchgeführt werden? Wie viele Wiegevorgänge sind im schlimmsten Fall, also höchstens, nötig?

(e) Gegeben seien jetzt 9 Münzen; 8 davon sind gleichschwer und eine ist etwas schwerer als jede der 8 anderen Münzen. Überlegen Sie sich ein Verfahren, mit dem Sie mit Hilfe der Balkenwaage und so wenigen Wiegevorgängen wie möglich die schwerere Münze finden können.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: Präsenz

(a) Betrachten Sie die Relation $R \coloneqq \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c)\}$ über der Menge $A \coloneqq \{a,b,c,d\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils:

(i) konnex ist? **(ii)** transitiv ist? **(iii)** eine Präordnung ist?

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i für $i \in \{3,4\}$.

(i) $M_3 \coloneqq \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, $R_3 \coloneqq \{(x,y) \in M_3 \times M_3 : x \cdot y \leq 3\}$.

(ii) $M_4 \coloneqq \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $R_4 \coloneqq \{(a,b) \in M_4 \times M_4 : \mathrm{ggT}(a,b) > 1\}$, wobei $\mathrm{ggT}(a,b)$ der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist.

Geben Sie für jedes $i \in \{3,4\}$ und jede der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“, „antisymmetrisch“, „konnex“, „transitiv“ an, ob die Relation R_i diese Eigenschaft besitzt oder nicht.

(c) Sei A eine beliebige nicht-leere Menge. Für Worte über dem Alphabet A definieren wir die Relation

$$\text{Prä}_A \coloneqq \{(a,b) \in A^* \times A^* : \text{ex. } c \in A^*, \text{ s.d. } ac = b\}.$$

Falls $(a,b) \in \text{Prä}_A$, so heißt a *Präfix* von b.

(i) Zeigen Sie, dass für jedes Alphabet A gilt: Prä_A ist eine partielle Ordnung auf A^*.

(ii) Geben Sie zwei konkrete Alphabete A_1 und A_2 an, sodass gilt:

(1) Prä_{A_1} ist eine lineare Ordnung. (2) Prä_{A_2} ist keine lineare Ordnung.