

Diskrete Strukturen

Wintersemester 2022/23

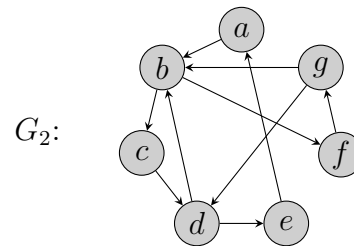
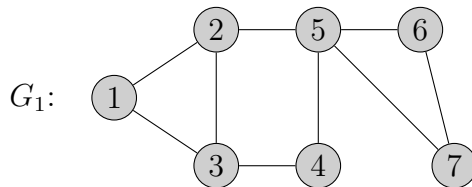
Übungsblatt 4

Abgabe: bis 19. Dezember 2022, 10.00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1:

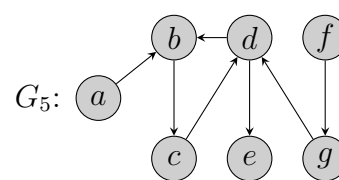
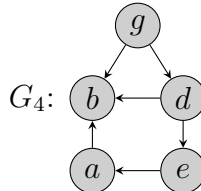
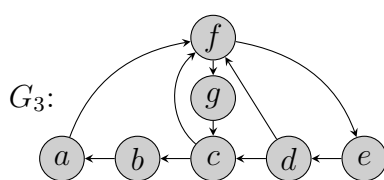
(16 + 6 + 6 + 36 + 4 = 68 Punkte)

Es seien die folgenden beiden Graphen G_1 und G_2 gegeben:



- (a) Geben Sie für jeden der beiden Graphen G_1 und G_2 die Knotenmenge und die Kantenmenge an. Repräsentieren Sie außerdem jeden der beiden Graphen durch eine Adjazenzmatrix und eine Adjazenzliste.
- (b) Geben Sie einen Weg von Knoten 2 nach Knoten 4 in G_1 an, der *nicht* einfach ist. Geben Sie außerdem einen Kreis in G_1 an, der *nicht* einfach ist und durch den Knoten 2 verläuft.
- (c) Ist G_1 zusammenhängend? Ist G_2 stark zusammenhängend? Ist G_2 azyklisch? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.
- (d) Überprüfen Sie für jeden der folgenden Graphen $G \in \{G_3, G_4, G_5\}$, ob Folgendes gilt:
 - (i) $G = G_2$,
 - (ii) G ist ein Teilgraph von G_2 ,
 - (iii) G ist ein induzierter Teilgraph von G_2 ,
 - (iv) Es existiert ein Isomorphismus zwischen G und G_2 .

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



- (e) Geben Sie die starken Zusammenhangskomponenten von G_5 an.

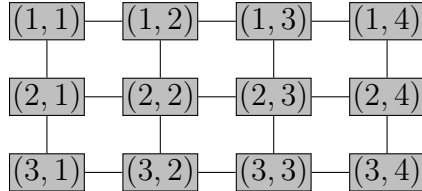
Aufgabe 2:

(4 · 8 = 32 Punkte)

Für $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei das $m \times n$ -Gitter der Graph $G_{m \times n} = (V_{m \times n}, E_{m \times n})$ mit

$$V_{m \times n} := \{ (i, j) : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \},$$
$$E_{m \times n} := \{ \{ (i, j), (i, j+1) \} : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n \} \cup \{ \{ (i, j), (i+1, j) \} : i, j \in \mathbb{N}, 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n \}.$$

Das 3×4 -Gitter $G_{3 \times 4}$ sieht z.B. wie folgt aus:



- (a) Überprüfen Sie, ob $G_{3 \times 4}$ bipartit ist. Falls $G_{3 \times 4}$ bipartit ist, so geben Sie zwei disjunkte Knotenmengen $V_1, V_2 \subseteq V_{3 \times 4}$ mit $V_1 \cup V_2 = V_{3 \times 4}$ an, so dass jede Kante aus $E_{3 \times 4}$ einen Knoten aus V_1 und einen Knoten aus V_2 miteinander verbindet. Falls $G_{3 \times 4}$ nicht bipartit ist, so begründen Sie dies.
- (b) Geben Sie ein Matching maximaler Größe in $G_{3 \times 4}$ an.
- (c) Geben Sie einen Hamilton-Kreis in $G_{3 \times 4}$ an.
- (d) Für welche $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ besitzt $G_{m \times n}$ einen Hamilton-Kreis, für welche nicht?

Hinweis: Stellen Sie sich vor, dass die Knoten des Gitters so mit den Farben rot oder blau eingefärbt sind, dass benachbarte Knoten unterschiedliche Farben besitzen. Jeder Weg durch das Gitter besucht daher immer abwechselnd einen blauen und einen roten Knoten.

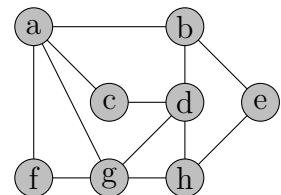
Aufgabe 3: Präsenz

Geben Sie für jede der Zahlen null, eins, ..., zehn die Darstellung zur Basis n (ohne führende Nullen) für jedes $n \in \{3, 4, 5\}$ an.

Aufgabe 4: Präsenz

Betrachten Sie den ungerichteten Graphen G auf der rechten Seite.

- (a) Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen G an. Repräsentieren Sie G außerdem durch eine Adjazenzmatrix und eine Adjazenzliste.
- (b) Geben Sie einen Euler-Weg in G an. Besitzt G auch einen Euler-Kreis? Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort.
- (c) Geben Sie einen Hamilton-Kreis in G an.



Aufgabe 5: Präsenz

Auf dem Weihnachtsmarkt von Großdorf sollen insgesamt 8 Stände rund um den Marktplatz arrangiert werden. Die 8 Stände setzen sich folgendermaßen zusammen:

- Ein Stand, in dem die traditionelle Weihnachtskrippe aufgebaut ist;
- Zwei Stände, an denen Kunsthandwerk verkauft wird: Einer der beiden Stände ist die Töpferei, der andere bietet Holzschmuck aus dem Erzgebirge an;
- Zwei Glühweinstände, einer davon wird von Herrn Max, der andere von Frau Peters betrieben;
- Drei Essensstände, einer davon verkauft Crêpes, der andere Waffeln und der dritte Steaks vom Holzkohlegrill.

Bei der Platzierung der 8 Stände um den Marktplatz ist Folgendes zu beachten: Neben die Weihnachtskrippe darf keiner der Glühweinstände platziert werden. Essensstände dürfen nicht nebeneinander stehen, die beiden Glühweinstände dürfen ebenfalls nicht nebeneinander platziert werden, und selbiges gilt auch für die beiden Kunsthandwerkstände. Aus Sicherheitsgründen darf der Holzkohlegrill weder neben die Weihnachtskrippe noch neben den Stand mit dem Holzschmuck aus dem Erzgebirge gestellt werden. Herr Max ist mit den Besitzern des Holzkohlegrills und der Töpferei befreundet und möchte daher unbedingt die beiden als Nachbarn haben. Außerdem ist zu beachten, dass sich der Betreiber des Waffelstands weder mit Frau Peters noch mit dem Besitzer der Töpferei verträgt und daher auf keinen Fall neben einem der beiden platziert werden will.

- Stellen Sie den Konfliktgraph und das Komplement des Konfliktgraphen auf.
- Gibt es im Komplement des Konfliktgraphen einen Hamiltonkreis? Falls ja, dann geben Sie einen solchen Hamiltonkreis an. Falls nein, dann begründen Sie, warum es keinen gibt.
- Geben Sie, falls möglich, eine Platzierung der 8 Stände rund um den Marktplatz an, mit der alle zufrieden sind.