Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

22. November 2022

Diskrete Strukturen

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 5. Dezember 2022, 10.00 Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: (3 · 20 = 60 Punkte)

(a) Beweisen Sie Satz 2.54 (a) mittels vollständiger Induktion. Das heißt, zeigen Sie:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.
(d.h. die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ergibt gerade die Zahl n^2.)

(b) Beantworten Sie die Frage am Ende der Bemerkung 2.58. Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Beweisen Sie Satz 2.64 (a). Das heißt, zeigen Sie:

Für jede Menge M gilt: $\mathcal{P}(M)$ ist echt mächtiger als M.

Aufgabe 2: (4 · 5 + 20 = 40 Punkte)

Betrachten Sie das Alphabet $\Sigma \coloneqq \{\texttt{M}, \texttt{I}, \texttt{U}\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei auf die folgende Art rekursiv definiert:[1]

Basisregel:

(B1) $\texttt{MI} \in L$.

Rekursive Regeln: Für alle $w, w' \in \Sigma^*$ gilt:

(R1) Ist $w\texttt{I} \in L$, so ist auch $w\texttt{IU} \in L$,

(R2) ist $\texttt{M}w \in L$, so ist auch $\texttt{M}ww \in L$,

(R3) ist $w\texttt{III}w' \in L$, so ist auch $w\texttt{U}w' \in L$,

(R4) ist $w\texttt{UU}w' \in L$, so ist auch $ww' \in L$.

(a) Geben Sie für die folgenden Aussagen an, ob Sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(i) $\texttt{MIU} \in L$.

(ii) $\texttt{UMII} \in L$.

(iii) $\texttt{MUII} \in L$.

(iv) $\texttt{MU} \in L$.

(b) Beweisen Sie per Induktion über die Definition der Menge L, dass für jedes Wort $w \in L$ gilt: Die Anzahl $|w|_{\texttt{I}}$ der Vorkommen des Symbols $\texttt{I}$ in w ist *nicht* durch 3 teilbar.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

[1] Diese Sprache L wird im Buch *Gödel, Escher, Bach* von Douglas R. Hofstadter betrachtet.

Aufgabe 3: Präsenz

Beweisen Sie per vollständiger Induktion die folgende Aussage:

> Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n^5 - n)$ durch 5 teilbar.

Aufgabe 4: Präsenz

Sei $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Gegeben sei folgende rekursiv definierte Funktion:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ sei} \quad g_s(n) \coloneqq \begin{cases} s, & \text{falls } n = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot g_s(n-1), & \text{falls } g_s(n-1) \text{ gerade und } n \geq 1 \\ 3 \cdot g_s(n-1) + 1, & \text{falls } g_s(n-1) \text{ ungerade und } n \geq 1 \end{cases}$$

Das heißt, s ist der Startwert der Funktion. Berechnen Sie $g_5(5)$ und $g_{23}(15)$.[2]

[2] Bei dieser Funktion handelt es sich um die sogenannte Collatz-Funktion für den Startwert $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Es ist kein konkreter Startwert s bekannt, für den g_s nicht irgendwann den Wert 1 erreicht. Es ist eine offene Forschungsfrage, ob tatsächlich *für jedes* $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ein $n_s \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $g_s(n_s) = 1$.