

Diskrete Strukturen

Wintersemester 2022/23

Übungsblatt 0

Abgabe: Keine – wird in der ersten Übungsstunde besprochen.

Aufgabe 1: Organisatorisches

- (a) Lesen Sie sich sorgfältig die Webseite zur Veranstaltung durch: <https://hu.berlin/DiskreteStrukturen>
- (b) Auch die Infoseite der Fachschaft ist lesenswert: <https://hu.berlin/ese>

Aufgabe 2:

Der Polizist John McClane hat ein Déjà-vu:¹ Schon wieder steht er knietief in einem Brunnen und soll mithilfe von zwei Gefäßen eine bestimmte Menge Wasser daraus schöpfen. Immerhin ist die Aufgabe seit dem letzten Mal etwas einfacher geworden (Bruce ist ja auch nicht mehr der Jüngste). John startet mit zwei leeren Gefäßen, eines davon fasst genau einen Liter, das andere genau drei. Ziel ist es, in beiden Gefäßen jeweils genau die Menge von einem Liter Wasser zu haben. Da sich an den Gefäßen keine Markierungen befinden, kann John sein Ziel nur durch eine schrittweise Ausführung der folgenden Aktionen erreichen: Er kann eines der Gefäße vollständig mit Wasser aus dem Brunnen befüllen, eines der Gefäße komplett auskippen oder Wasser eines Gefäßes in das andere kippen bis eines der Gefäße voll oder leer ist. Da John es hasst, von vorne zu beginnen, wird er außerdem niemals in den Startzustand mit zwei leeren Gefäßen zurückkehren.

Modellieren Sie zur Beantwortung der folgenden Fragen das Problem durch ein Transitionssystem analog zum „Murmelbeispiel“ aus der Vorlesung.

- (a) Kann John McClane sein Ziel erreichen?
- (b) Ist es möglich, dass John sich durch eine ungeschickte Abfolge von Schritten (aber unter Berücksichtigung der Regeln) in eine Situation bringt, aus der er das Ziel nicht mehr erreichen kann?
- (c) Für John ist es unerträglich, nicht voranzukommen. Er möchte deshalb niemals eine gerade getätigte Aktion direkt wieder rückgängig machen. Nehmen Sie nun an, dass John keine Aktion direkt wieder rückgängig macht und ansonsten (unter Berücksichtigung der Regeln) wahllos vorgeht. Wird er dann zwangsläufig irgendwann in den Zustand kommen, in dem er sein Ziel erreicht hat?

Aufgabe 3:

Abgeordnete des Deutschen Bundestages bilden Ausschüsse, die sich mit einem bestimmten Thema befassen. Sei A die Menge der Abgeordneten, die im Ausschuss Arbeit/Soziales sind und F die Menge der Abgeordneten die sich im Ausschuss Finanzen befinden. Außerdem sei S

¹Die Figur John McClane und die Situation in abgewandelter Form ist dem Film „Stirb langsam 3“ entnommen.

die Menge der Abgeordneten, die im Sport-Ausschuss sind. Es sind folgende Informationen über die Anzahl der Abgeordneten in den verschiedenen Ausschüssen bekannt:

$$|A| = 17, \quad |F| = 18, \quad |S| = 15, \quad |A \cap F| = 8, \quad |A \cap S| = 7, \quad |F \cap S| = 9, \quad |A \cap F \cap S| = 5$$

- (a) Wie viele Abgeordnete sind in mindestens einem der Ausschüsse Mitglied?
D.h. berechnen Sie $|A \cup F \cup S|$.
- (b) Wie viele der Abgeordneten sind in genau zwei Ausschüssen?
D.h. berechnen Sie $|((A \cap F) \cup (A \cap S) \cup (F \cap S)) \setminus (A \cap F \cap S)|$.
- (c) Es soll ein Unterausschuss gebildet werden, dem alle Abgeordneten des Sport-Ausschusses angehören und zusätzlich alle Abgeordneten, die im Arbeit/Soziales- aber nicht im Finanz-Ausschuss sitzen. Wie viele Mitglieder hat dieser Unterausschuss?
D.h. berechnen Sie $|S \cup (A \setminus F)|$.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst anhand von Venn-Diagrammen, wie man die Kardinalitäten der Mengen berechnen kann.

Aufgabe 4:

Sei $U := \{1, 2, \dots, 10\}$ ein festes Universum und seien $M := \{1, 3, 5\}$, $N := \{2, 3, 5, 7\}$ und $P := \{1, 4, 9\}$. Schreiben Sie jede der folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an.

- (a) $M \setminus (N \cup P)$
- (b) $(M \setminus N) \cup (M \setminus P)$
- (c) $(M \cup N) \cap \bar{P}$
- (d) $(M \cap \bar{P}) \cup (N \cap \bar{P})$
- (e) $\{Q \mid Q \subseteq N, |Q| = 3\}$