Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

28. November 2019

Logik in der Informatik

Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 10. Dezember 2019, 11.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Achtung: Diese Aufgabe ist bis zum Abgabetermin durch die Beantwortung eines Quiz in Moodle **von jeder Teilnehmerin/jedem Teilnehmer einzeln** abzugeben.

(a) Der örtliche *Toobi-Baumarkt* hat einen neuen Automaten entwickelt, um der Kundschaft Farben zu empfehlen. Dazu geben die Kunden eine oder zwei Farben aus einer Auswahl von sechs Farben in den Automaten ein und erhalten eine der sechs Farben als Ergebnis. Die sechs Farben ergeben das Universum $A := \{\text{Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange, Rot}\}$. Wenn der Automat nur eine Farbe als Eingabe bekommt, dann nimmt er Violett als zweite Eingabefarbe an. Besteht die Eingabe aus zweimal der gleichen Farbe, dann wird die komplementäre Farbe ausgegeben. Bei zwei komplementären Farben als Eingabe wird Violett ausgegeben, da man mit Violett nie etwas falsch machen kann. Ansonsten werden doppelte Grundfarbanteile gestrichen und aus den restlichen Grundfarbanteilen die Ausgabefarbe gemischt.

Sei $\sigma := \{f, c\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ mit $c^{\mathcal{A}} :=$ Violett. $\mathcal{A}$ soll die Funktionsweise des Farbempfehlungsautomaten beschreiben. Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Violett	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot
Violett	Gelb	Rot	Orange	Violett	Grün	Blau
Blau	Rot	Orange	Gelb	Grün	Violett	Violett
Grün	Orange	Gelb	Rot	Blau	Violett	Violett
Gelb	Violett	Grün	Blau	Violett	Rot	Orange
Orange	Grün	Violett	Violett	Rot	Blau	Gelb
Rot	Blau	Violett	Violett	Orange	Gelb	Grün

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Rot}, \quad \beta(v_1) = \text{Gelb}, \quad \beta(v_2) = \text{Blau}, \quad \text{und} \quad \beta(v_i) = \text{Orange} \quad \text{für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme, die Eingaben der Toobi-Kundschaft repräsentieren:

(i) $t_1 := f(v_{73}, c)$

(ii) $t_2 := f(f(v_{42}, v_0), f(v_1, c))$

(iii) $t_3 := f(f(f(v_2, v_5), f(v_3, c)), v_9)$

(b) Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c. Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term, um eine atomare σ-Formel und/oder um eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel (gemäß der Definitionen aus dem Skript) handelt.

- **(i)** c
- **(ii)** $f(c, f(v_2, v_0))$
- **(iii)** $R(v_1 \vee v_2)$
- **(iv)** $\forall v_{42}\, \exists v_{73} \Big(\, R(v_{42}, v_{73}) \;\wedge\; S(v_{21}, v_{42}, v_{73}) \,\Big)$
- **(v)** $\exists v_7\; f\Big(f(f(f(v_7)))\Big) = f\Big(S(v_7, v_7, v_7)\Big)$
- **(vi)** $\forall v_4\, \exists v_5\, \forall v_6 \Big(\, f(v_3) = c \rightarrow \Big(\, S(f(v_1), v_4, v_5) \;\vee\; R(v_1, v_6) \,\Big)\,\Big)$

Aufgabe 2: (26 Punkte)

Sei $\sigma = \{M, B, F, \mathit{Nachfolger}, \mathit{letzter}\}$ eine Signatur, wobei M, B, F 1-stellige Relationssymbole, *Nachfolger* ein 1-stelliges Funktionssymbol und *letzter* ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 34\}$ und $\mathit{letzter}^{\mathcal{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in M^{\mathcal{A}} \iff$ 1. FSV Mainz 05 ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in B^{\mathcal{A}} \iff$ Hertha BSC ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in F^{\mathcal{A}} \iff$ Eintracht Frankfurt ist Tabellenführer an Spieltag a
- $\mathit{Nachfolger}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \ldots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

- **(i)** Der 1. FSV Mainz 05 wird Meister.
- **(ii)** Jede der drei genannten Mannschaften ist mindestens einmal Tabellenführer.
- **(iii)** Ist Eintracht Frankfurt an einem Spieltag Erster, so wird sie auch Meister.
- **(iv)** Hertha BSC holt den Titel, wenn sie bereits am vorletzten Spieltag Tabellenführer sind.

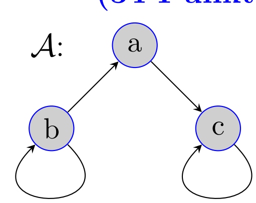
(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

- **(i)** $\neg\exists x\Big(\, \neg\Big(\, (M(x) \;\vee\; B(x)) \;\vee\; F(x) \,\Big)\Big)$
- **(ii)** $\Big(\, \neg\exists x\Big(B(x) \wedge \neg x = \mathit{letzter}\Big) \;\rightarrow\; \neg B(\mathit{letzter}) \,\Big)$
- **(iii)** $\forall x\Big(\, \Big(\, (\neg\, \mathit{Nachfolger}(x){=}\mathit{letzter} \;\wedge\; F(x)) \;\wedge\; F(\mathit{Nachfolger}(x))\Big) \;\rightarrow\; \neg F\Big(\mathit{Nachfolger}(\mathit{Nachfolger}(x))\Big)\Big)$

Aufgabe 3: (34 Punkte)

(a) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus dem zweistelligen Relationssymbol E besteht. Geben Sie die σ-Struktur $\mathcal{A}$, die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird an.

$\mathcal{A}$:



(b) Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$.

- **(i)** Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := \mathit{cabaabbc}$ über dem Alphabet Σ an.

(ii) Sei $\mathcal{A}$ die σ_Σ-Struktur mit $A := [5]$, in der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[5]$ ist und $P_a^{\mathcal{A}} := \{1,3,5\}$, $P_b^{\mathcal{A}} := \{2,4\}$ und $P_c^{\mathcal{A}} := \emptyset$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{A}$ repräsentiert?

(iii) **Definition:** Ein $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.
Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \ := \ \forall x \Big(P_a(x) \ \rightarrow \ \exists y \Big(P_b(y) \wedge x \leqslant y \wedge \forall z \big((x \leqslant z \wedge z \leqslant y) \rightarrow (z = x \vee z = y) \big) \Big) \Big)$$

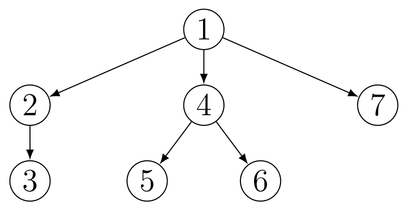
Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangsprachlich angeben.

(iv) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(ab)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie, warum Ihr $\mathsf{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz das Gewünschte leistet.

(c) In dieser Aufgabe sollen gerichtete Bäume durch Strukturen über einer Signatur mit einem einstelligen Funktionssymbol f repräsentiert werden.

(i) Beschreiben Sie, wie ein gegebener gerichteter Baum $\mathcal{B} = (V^{\mathcal{B}}, E^{\mathcal{B}})$ mit $V^{\mathcal{B}} \neq \emptyset$ durch eine Struktur über der Signatur $\sigma = \{f\}$ modelliert werden kann.

(ii) Geben Sie die entsprechende Struktur für den folgenden Baum an:



Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(`i`)` das Literal A_i und `neg(`i`)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.
Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass `L1`, `L2` und `R` Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` erfüllt wenn `R` eine Resolvente von `L1` und `L2` ist. Beispielsweise sollte die Anfrage

`?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R).`

zu folgenden Ausgaben führen:

`R = [pos(1),pos(4),pos(2),neg(4)]` und `R = [pos(1),neg(3),pos(2),pos(3)]`

Hinweise: Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Blatt 4 Teilaufgabe 4(c); haben Sie diese Aufgabe nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.

(b) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben `D`, `E`, `M`, `N`, `O`, `R`, `S`, `Y` die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben `M`, `O`, `R`, `E` die Ziffern 8, 7, 1, 4 zu, so entpricht `MORE` der Dezimalzahl 8714.

```
      S E N D
+     M O R E
-------------
=   M O N E Y
```

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \ldots, 9\}$ zu den Buchstaben `D`, `E`, `M`, `N`, `O`, `R`, `S`, `Y` ist eine Lösung für das Rätsel, wenn

- die Gleichung $\texttt{SEND} + \texttt{MORE} = \texttt{MONEY}$ erfüllt ist.
- es keine zwei Buchstaben aus $\{\texttt{D}, \texttt{E}, \texttt{M}, \texttt{N}, \texttt{O}, \texttt{R}, \texttt{S}, \texttt{Y}\}$ gibt, denen die gleiche Ziffer zugeordnet ist
- die Zahlen aus der Gleichung keine führenden Nullen besitzen (d.h.: weder `M` noch `S` darf die Ziffer 0 zugeordnet werden).

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/8`, so dass

```
raetsel(D, E, M, N, O, R, S, Y)
```

alle Lösungen für das Rätsel ausgibt.

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \ldots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.

Achtung: Falls die Berechnungen aller Lösungen auf `gruenau6` mehr als 10 Sekunden benötigt, werden Sie mit Ihrer Abgabe nicht die volle Punktzahl erreichen.