Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

31. Oktober 2019

Logik in der Informatik

Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 12. November 2019, 11.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) A_{23}

(ii) $((\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \wedge \neg A_1)$

(iii) $\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg\mathbf{0} \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg\mathbf{1}) \wedge \neg A_4)))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn $\widetilde{\varphi}$ nicht allgemeingültig ist, dann ist φ erfüllbar.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\to}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$\llbracket (X \mathbin{\tilde{\to}} Y) \rrbracket^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - \llbracket (X \to Y) \rrbracket^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren und beweisen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

(a) **Achtung:** Diese Teilaufgabe ist bis zum Abgabetermin durch die Beantwortung eines Quiz in Moodle **von jeder Teilnehmerin/jedem Teilnehmer einzeln** abzugeben.

Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder KNF und/oder NNF ist.

(i) $((A_{73} \vee \neg A_{42}) \vee A_{1337})$

(ii) $\Big(\big((\neg A_9 \vee A_1) \wedge \mathbf{0}\big) \vee \neg A_8\Big)$

(iii) $\big((A_0 \wedge \neg A_8) \vee (A_1 \vee A_5)\big)$

(iv) $\Big(\bigwedge_{i=2}^{4} \Big(\bigwedge_{j=5}^{73} \Big(\bigvee_{k=1}^{42} A_{i+j+k} \Big)\Big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die beiden Formel

$$\begin{aligned}\varphi &:= \Big(\big(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_2\big) \wedge \neg A_4\Big) \quad \text{und} \\ \psi &:= \Big(A_3 \vee \big((\neg A_2 \rightarrow (\neg A_0 \vee A_1)) \wedge A_4\big)\Big) \,.\end{aligned}$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.40 und 2.44 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe) welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**. Achten Sie darauf, dass in Satz 2.25 häufig die äußeren Klammern fehlen.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d.h.: Die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel φ in DNF, und die Aufgabe ist, zu entscheiden ob φ erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja“, geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein“, weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus "Learn Prolog Now!".

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise unter
`https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS19-20/Logik/prolog-uebung.shtml`

Tom ist genervt. Ständig verliert er gegen Jerry im Schere-Stein-Papier-Spiel, was die Maus zum Anlass nimmt ihn auszulachen. Er hat gelesen, dass viele Gewinner auf psychologische Tricks vertrauen und so die Wahl des Gegners beeinflussen. Also beschließt Tom sich vor jeder Partie einen Spielplan zu erstellen und während der Partie nicht davon abzuweichen. Zu diesem Zweck und für tiefer gehende Berechnungen repräsentiert er Spielpläne durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term

$$t \; := \; \texttt{stein(schere(papier(schere(start))))}$$

den Spielplan für eine Partie von vier Runden, bei der Tom in der ersten Runde *Schere* wählt, in der Zweiten *Papier*, um danach wieder *Schere* und schlußendlich *Stein* zu wählen.

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `spielplan/1`, so dass `spielplan(X)` für einen beliebigen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Spielplan für das Schere-Stein-Papier-Spiel repräsentiert. Beispielsweise sollte das Ziel `spielplan(`t`)` erfüllt sein, jedoch nicht das Ziel `spielplan(f(42,73))`.

(b) Jerry findet die Idee Prolog zu nutzen natürlich hervorragend und beide beschließen zukünftig das schweißtreibende und gelenkverschleißende Spiel einer unparteiischen Prolog-Implementierung zu überlassen. Schreiben Sie dafür ein Prädikat `tomWins/2`, so dass `tomWins(X,Y)`, für zwei Spielpläne `X` (von Tom) und `Y` (von Jerry) wahr ist, falls beides Pläne derselben Rundenzahl sind und nach einer solchen Partie Tom gewonnen hat, d.h. die Anzahl der durch Tom gewonnenen Runden größer ist, als die Anzahl der Runden, die Jerry in dieser Partie gewinnt.

Vorgehen: Definieren Sie hierfür ein Hilfsprädikat `tomWins(X,Y,U,V)`, das genau dann für zwei Spielpläne `X` und `Y` gilt, falls `U` als Unärzahl[1] der Anzahl der gewonnen Runden im Spiel `X` vs. `Y` entspricht und `V` unär der Anzahl der gewonnen Runden von `Y`. Nutzen Sie weiterhin ein selbstdefiniertes Prädikat `greater/2` um die zwei Unärzahlen zu vergleichen.

Zur Erinnerung: Im Schema finden sich die Spielregeln, nach denen sich der Gewinner ermitteln läßt.

	Schere	*Stein*	*Papier*
Schere	*Schere*	*Stein*	*Schere*
Stein	*Stein*	*Stein*	*Papier*
Papier	*Schere*	*Papier*	*Papier*

[1] Analog zum Buch mittels `0` und `succ`.