1.1 Beweis von Theorem 1.5

Um Theorem 1.5 zu beweisen, nutzen wir zwei technische Lemmas, die im Folgenden behandelt werden.

Lemma 1.6

Sei σ eine Signatur, seien $d, r, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, seien $x_1, \dots, x_n, y$ $n+1$ verschiedene Variablen, sei $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sei $\tau \in \mathcal{L}_r^{\sigma, d}(n+1)$ und sei

$$t(\overline{x}) \quad := \quad \#(y).\ \mathrm{sph}_{\tau, r}(\overline{x}, y).$$

Für jedes $R' \geq R := 3r+1$ und jedes $\rho \in \mathcal{L}_{R'}^{\sigma, d}(n)$ gibt es einen einfachen Zählterm $\hat{t}_\rho$ der Signatur σ, so dass f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Tupel $\overline{a} \in A^n$ vom R'-Typ ρ in $\mathcal{A}$ (d.h. $(\mathcal{N}_{R'}^{\mathcal{A}}(\overline{a}), \overline{a}) \cong \rho$) gilt:

$$t^{\mathcal{A}}[\overline{a}] \quad = \quad \hat{t}_\rho^{\,\mathcal{A}}$$

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der $\hat{t}_\rho$ bei Eingabe von $t(\overline{x}), R', \rho$ berechnet. Des Weiteren gilt: $\hat{t}_\rho$ ist eine natürliche Zahl oder von der Form $\#(y).\ \mathrm{sph}_{\tau_1, r}(y) - m$ für ein $\tau_1 \in \mathcal{L}_r^{\sigma, d}(1)$ und ein $m \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Wähle ein beliebiges $R' \geq R := 3r+1$ und ein beliebiges $\rho \in \mathcal{L}^{\sigma,d}_{R'}(n)$.

Sei $\rho = (\mathcal{S}, a'_1, \dots, a'_n)$. Setze $\bar{a}' := (a'_1, \dots, a'_n)$.

Wir wissen: $\mathcal{S} = \mathcal{N}^{\mathcal{S}}_{R'}(\bar{a}')$.

Sei $\tau = (\mathcal{J}, e_1, \dots, e_n, f)$. Setze $\bar{e} := (e_1, \dots, e_n)$.

Wir wissen: $\mathcal{T} = \mathcal{N}^{\mathcal{J}}_{r}(\bar{e}, f)$.

Fall 1: Ex. $i \in [n]$ s.d. $\mathcal{N}^{\mathcal{J}}_{r}(e_i, f)$ zusammenhängend ist, d.h.: $\mathrm{dist}^{\mathcal{J}}(e_i, f) \leq 2r+1$ und $f \in N^{\mathcal{J}}_{2r+1}(e_i)$.

Dann ist $N^{\mathcal{J}}_{r}(f) \subseteq N^{\mathcal{J}}_{3r+1}(e_i)$, und daher ist

$$T = N^{\mathcal{J}}_{r}(\bar{e}, f) \subseteq N^{\mathcal{J}}_{3r+1}(\bar{e}).$$

Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ und jedes Tupel $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ vom R'-Typ ρ in $\mathcal{A}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
t^{\mathcal{A}}[\bar{a}] &= \left| \{ b \in A : \mathcal{A} \models sph_{\tau,r}[\bar{a}, b] \} \right| \\
&= \left| \{ b \in A : (\mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{r}(\bar{a}, b), \bar{a}, b) \cong (\mathcal{J}, \bar{e}, f) \} \right| \\
&= \left| \{ b \in N^{\mathcal{A}}_{2r+1}(a_i) : (\mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{r}(\bar{a}, b), \bar{a}, b) \cong (\mathcal{J}, \bar{e}, f) \} \right|
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\left| \left\{ b' \in N^{\mathcal{S}}_{2r+1}(a'_i) \ : \ \left(\mathcal{N}^{\mathcal{S}}_r(\bar{a}', b'), \bar{a}', b' \right) \cong (\mathcal{J}, \bar{e}, f) \right\} \right|}_{=: \ j_{\mathcal{S},\tau} \ \in \ \mathbb{N}}$$

da $R' \geq 3r+1$ und $\left(\mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{R'}(\bar{a}), \bar{a} \right) \cong (\mathcal{S}, \bar{a}')$ ist.

Wir sind daher fertig, indem wir

$$\hat{t}_{\mathcal{S}} := j_{\mathcal{S},\tau}$$

wählen.

<u>Fall 2:</u> F.a. $i \in [n]$ ist $\mathcal{N}^{\mathcal{J}}_r(e_i, f)$ nicht zusammenhängend,

d.h. $\mathrm{dist}^{\mathcal{J}}(e_i, f) > 2r+1$ f.a. $i \in [n]$.

Setze $W_1 := N^{\mathcal{J}}_r(f)$, $\quad \tau_1 := (\mathcal{J}[W_1], f)$,

$\qquad W_2 := N^{\mathcal{J}}_r(\bar{e})$, $\quad \tau_2 := (\mathcal{J}[W_2], \bar{e})$.

Dann ist $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $\quad W_1 \cup W_2 = T = N^{\mathcal{J}}_r(\bar{e}, f)$, und

τ ist die <u>disjunkte Vereinigung</u> von τ_1 und τ_2

(kurz: $\tau = \tau_1 \sqcup \tau_2$), wobei die disjunkte Vereinigung zweier σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit $A \cap B = \emptyset$ definiert ist als die σ-Struktur $\mathcal{C}$ mit Universum $C := A \cup B$ und Relationen $R^{\mathcal{C}} := R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ f.a. $R \in \sigma$.

Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ und jedes Tupel
$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ vom R'-Typ ρ in $\mathcal{A}$
(d.h.: $\left(\mathcal{N}_{R'}^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a}\right) \cong \left(\mathcal{N}_{R'}^{\rho}(\bar{a}'), \bar{a}'\right)$) gilt:

$$
\begin{aligned}
t^{\mathcal{A}}[\bar{a}] &= \left| \left\{ b \in A : \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b), \bar{a}, b\right) \cong \tau \right\} \right| \\
&= \Big| \Big\{ b \in A : \underbrace{\begin{array}{l} \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b), \bar{a}, b\right) \cong \tau \text{ und} \\ \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(b), b\right) \cong \tau_1 \text{ und} \\ \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a}\right) \cong \tau_2 \end{array}} \Big\} \Big|
\end{aligned}
$$

$\iff \left(\mathcal{N}_r^{\rho}(\bar{a}'), \bar{a}'\right) \cong \tau_2$, da $\bar{a}$ vom R'-Typ ρ in $\mathcal{A}$ und $R' \geq r$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{falls } \left(\mathcal{N}_r^{\rho}(\bar{a}'), \bar{a}'\right) \not\cong \tau_2 \\ j_1^{\mathcal{A}} - j_2^{\mathcal{A}}[\bar{a}] & \text{sonst} \end{cases} \qquad (*)
$$

wobei

$$
j_1^{\mathcal{A}} := \left| \left\{ b \in A : \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(b), b\right) \cong \tau_1 \right\} \right| = \left(\#(y).\, \mathrm{Sph}_{\tau_1, r}(y)\right)^{\mathcal{A}}
$$

$$
j_2^{\mathcal{A}}[\bar{a}] := \left| \left\{ b \in A : \begin{array}{l} \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(b), b\right) \cong \tau_1 \text{ und} \\ \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b), \bar{a}, b\right) \not\cong \tau \end{array} \right\} \right|
$$

Fall 2.1: $(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{I}}(\bar{a}'), \bar{a}') \ncong \tau_2$:

Wegen (*) sind wir fertig, indem wir

$$\hat{t}_{\mathfrak{I}} := 0$$

wählen.

Fall 2.2: $(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{I}}(\bar{a}'), \bar{a}') \cong \tau_2$

Sei $\mathcal{J}$ die Menge aller $\tau' = (\mathfrak{J}', \bar{e}', f') \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(n+1)$, für die gilt:

(1) $\tau' \ncong \tau$,

(2) $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{J}'}(f') \cong \tau_1$ und

(3) $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{J}'}(\bar{e}') \cong \tau_2$.

Wegen $\tau = \tau_1 \sqcup \tau_2$ muss für jedes $\tau' = (\mathfrak{J}', \bar{e}', f') \in \mathcal{J}$ gelten: ex. $i \in [n]$ s.d. $\mathrm{dist}^{\mathfrak{J}'}(e_i', f') \leq 2r+1$, d.h. $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{J}'}(e_i', f')$ ist zusammenhängend.

Sei $j_{\mathfrak{I},\tau'} \in \mathbb{N}$ wie in Fall 1 gewählt, d.h.

$$j_{\mathfrak{I},\tau'} := \left| \{ b' \in N_{2r+1}^{\mathfrak{I}}(a_i') : (\mathcal{N}_r^{\mathfrak{I}}(\bar{a}', b'), \bar{a}', b') \cong \tau' \} \right|.$$

F.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Tupel $\bar{a} \in A^n$ vom R^1-Typ ϱ in $\mathcal{A}$ gilt:

$$j_2^{\mathcal{A}}[\bar{a}] := \left| \{ b \in A : (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(b), b) \cong \tau_1 \text{ und } (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b), \bar{a}, b) \not\cong \tau \} \right|$$

$$= \left| \dot{\bigcup_{\tau' \in J}} \{ b \in A : (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b), \bar{a}, b) \cong \tau' \} \right|$$

$$= \sum_{\tau' \in J} \underbrace{\left| \{ b \in A : (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}, b), \bar{a}, b) \cong \tau' \} \right|}_{= \text{ gemäß Fall 1}}$$

$$= \sum_{\tau' \in J} j_{\varrho, \tau'}$$

$$=: j_{\varrho, \tau} \in \mathbb{N}$$

Wir sind daher fertig, indem wir

$$\hat{t}_\varrho := \#(y) . sph_{\tau_1, r}(y) - j_{\varrho, \tau}$$

wählen.

$\square$ Lemma 1.6

Lemma 1.7

Sei σ eine Signatur, seien $d, r, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$,

sei $\mathcal{L}_r^{\sigma, d}(n) = \tau_1, \ldots, \tau_\ell$ und seien

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ n verschiedene Variablen.

Sei $s \in \mathbb{N}$ und seien $\chi_1, \ldots, \chi_s$ Sätze der Signatur σ einer beliebigen Logik (z.B. FOC(P)[σ]-Sätze).

Sei $\psi(\bar{x})$ eine Boolesche Kombination, die aus den Sätzen $\chi_1, \ldots, \chi_s$ und aus Formeln der Form

$sph_{\tau', r'}(y_1, \ldots, y_{n'})$ mit $r' \leq r$, $n' \leq n$, wobei $y_1, \ldots, y_{n'}$ n' verschiedene Variablen aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sind und τ' ein r'-Typ mit n' Zentren der Signatur σ und vom Grad $\leq d$ ist.

Für jede Menge $J \subseteq [s]$ gibt es eine Menge $I \subseteq [\ell]$,

s.d.

$$\psi_J(\bar{x}) \equiv_d \bigvee_{i \in I} sph_{\tau_i, r}(\bar{x})$$

ist, wobei $\psi_J(\bar{x})$ die Formel ist, die aus $\psi(\bar{x})$ entsteht, indem jedes Vorkommen eines Satzes χ_j ersetzt wird durch

$$\begin{cases} \text{true} := \top := \forall z\ z = z, & \text{falls } j \in J \\ \text{false} := \bot := \exists z\ \neg z = z, & \text{falls } j \notin J. \end{cases}$$

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der bei Eingabe von $d, r, n, \psi(\bar{x}), x_1, \dots, x_s, J$ die Menge I berechnet.

<u>Beweis:</u>

Zunächst bringen wir $\psi_J(\bar{x})$ in "Negationsnormalform", so dass es eine Boolesche Kombination von true, false und Formeln der Form $sph_{\tau', r'}(y_1, \dots, y_{n'})$ ist, bei der Negationen nur unmittelbar vor "true", "false" und "$sph_{\tau', r'}(y_1, \dots, y_{n'})$" stehen.

Dann entfernen wir alle Vorkommen von "true" und "false", indem wir folgende Regeln wiederholt anwenden:

ersetze	durch
$\neg$ true	false
$\neg$ false	true
$(\varphi \wedge \text{true})$	φ
$(\text{true} \wedge \varphi)$	φ
$(\varphi \wedge \text{false})$	false
$(\text{false} \wedge \varphi)$	false
$(\varphi \vee \text{true})$	true
$(\text{true} \vee \varphi)$	true
$(\varphi \vee \text{false})$	φ
$(\text{false} \vee \varphi)$	φ

Dies liefert eine zu $\psi_{\mathcal{J}}(\bar{x})$ äquivalente Formel $\varphi(\bar{x})$, für die gilt:

(1) $\varphi(\bar{x}) =$ true oder

(2) $\varphi(\bar{x}) =$ false oder

(3) $\varphi(\bar{x})$ besteht aus Konjunktionen und Disjunktionen von Formeln der Form $sph_{\tau',r'}(y_1,\dots,y_{n'})$ oder $\neg sph_{\tau',r'}(y_1,\dots,y_{n'})$

In Fall (1) sind wir fertig, indem wir $I := [\ell]$ wählen.

In Fall (2) sind wir fertig, indem wir $I := \emptyset$ wählen (per Definition ist $\bigvee_{i\in\emptyset} sph_{\tau_i,r}(\bar{x})$ die Formel false).

In Fall (3) gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1: Ersetze jede in $\varphi(\bar{x})$ vorkommende Formel $sph_{\tau',r'}(y_1,\dots,y_{n'})$ durch eine dazu d-äquivalente Disjunktion von Formeln $sph_{\tau_j,r}(\bar{x})$ mit $\tau_j \in \mathcal{L}_r^{\mathrm{od}}(n)$:

Sei $(y_1,\dots,y_{n'}) = (x_{i_1},\dots,x_{i_{n'}})$. Sei $\tau' = (\mathcal{J}', e'_1,\dots,e'_{n'})$.

Sei $\mathcal{J}' := \{ j \in [\ell] :$ für $(\mathcal{J}, e_1,\dots,e_n) := \tau_j$ ist
$(N_{r'}^{\mathcal{J}}(e_{i_1},\dots,e_{i_{n'}}), e_{i_1},\dots,e_{i_{n'}}) \cong \tau' \}$.

Dann ist $$sph_{\tau',r'}(y_1,\dots,y_{n'}) \equiv_d \bigvee_{j\in\mathcal{J}'} sph_{\tau_j,r}(\bar{x}).$$

Sei $\varphi_1(\bar{x})$ die in Schritt 1 aus $\varphi(\bar{x})$ resultierende Formel. Beachte: $\varphi_1(\bar{x})$ ist eine Boolesche Kombination von Formeln der Form $sph_{\tau_j,r}(\bar{x})$ mit $j \in [\ell]$.

Schritt 2: Wende wiederholt die De Morgan'sche Regel an, um Negationszeichen nach innen zu schieben. Danach ersetzen wir jedes Vorkommen einer Formel der Form $\neg\, sph_{\tau_j,r}(\bar{x})$ durch die dazu d-äquivalente Formel $\bigvee\limits_{i \in [\ell] \setminus \{j\}} sph_{\tau_i,r}(\bar{x})$.

Sei $\varphi_2(\bar{x})$ die dadurch aus $\varphi_1(\bar{x})$ resultierende Formel.

Beachte: $\varphi_2(\bar{x})$ besteht aus Konjunktionen und Disjunktionen von Formeln der Form $sph_{\tau_i,r}(\bar{x})$ mit $i \in [\ell]$.

Schritt 3: Eliminiere alle Konjunktionen in $\varphi_2(\bar{x})$ wie folgt: Da $\tau_1, \ldots, \tau_\ell = \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(n)$ ist, gilt f.a. $i, i' \in [\ell]$:

$$sph_{\tau_i,r}(\bar{x}) \wedge sph_{\tau_{i'},r}(\bar{x}) \equiv \begin{cases} sph_{\tau_i,r}(\bar{x}) & \text{falls } i = i' \\ \text{false} & \text{sonst} \end{cases}$$

Anwenden der Distributivitätsregel liefert f.a. $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und alle $I_1, \dots, I_m \subseteq [\ell]$, dass

$$\bigwedge_{j \in [m]} \Big(\bigvee_{i \in I_j} \mathrm{sph}_{\tau_i, r}(\bar{x}) \Big)$$

$$\equiv \bigvee_{i_1 \in I_1} \cdots \bigvee_{i_m \in I_m} \Big(\mathrm{sph}_{\tau_{i_1}, r}(\bar{x}) \wedge \dots \wedge \mathrm{sph}_{\tau_{i_m}, r}(\bar{x}) \Big)$$

$$\equiv \bigvee_{i \in I} \mathrm{sph}_{\tau_i, r}(\bar{x})$$

für $I := I_1 \cap \dots \cap I_m$.

Während eines bottom-up-Durchlaufs durch den Syntaxbaum von $\varphi_2(\bar{x})$ wenden wir diese Äquivalenz an, um alle $\wedge$-Symbole zu eliminieren.

Die resultierende Formel $\varphi_3(\bar{x})$ ist von der Form $\bigvee_{i \in I} \mathrm{sph}_{\tau_i, r}(\bar{x})$ für eine Menge $I \subseteq [\ell]$.

$\square$ Lemma 1.7

Beweis von Theorem 1.5

Sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt. Seien $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ n versch. Variablen, für $n \in \mathbb{N}$.
Per Induktion nach dem Aufbau von φ konstruieren wir für jede $\mathrm{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Formel φ mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ eine HNF-Formel ψ für $\mathrm{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$ der Signatur σ mit $\mathrm{frei}(\psi) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $\psi \equiv_d \varphi$.

Induktionsanfang:

φ ist von der Form $x_{i_1} = x_{i_2}$ oder $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ mit $R \in \sigma$, $k = ar(R)$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\text{Sei } \mathcal{J} := \left\{ \tau \in \mathcal{L}_0^{\sigma,d}(n) : \text{für } (\mathcal{J}, e_1, \dots, e_n) = \tau \text{ gilt } \mathcal{J} \models \varphi\left[\frac{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}}{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}}\right] \right\}$$

$$\text{Es gilt: } \quad \varphi \equiv \underbrace{\bigvee_{\tau \in \mathcal{J}} \mathrm{sph}_{\tau,r}(\bar{x})}_{=: \psi} \quad \text{— ist eine HNF-Formel!}$$

Induktionsschritt:

Fall 1: φ ist von der Form $\neg\varphi'$ oder von der Form $(\varphi' \vee \varphi'')$. Die Induktionsannahme liefert HNF-Formeln $\psi'(\bar{x})$ und $\psi''(\bar{x})$ mit $\psi'(\bar{x}) \equiv_d \varphi'$ und $\psi''(\bar{x}) \equiv_d \varphi''$

Wir sind fertig, indem wir wählen:

$$\psi(\bar{x}) := \begin{cases} \neg \psi'(\bar{x}) & \text{falls } \varphi = \neg\varphi' \\ (\psi'(\bar{x}) \vee \psi''(\bar{x})) & \text{falls } \varphi = (\varphi' \vee \varphi'') \end{cases}$$

<u>Fall 2:</u> φ ist von der Form $\exists y\, \varphi'$.

Dann ist $\varphi \equiv N_{\geq 1}\big(\#(y).\, \varphi'\big)$.

Wir ersetzen φ durch die $FO(\mathcal{P} \cup \{N_{\geq 1}\})$-Formel $N_{\geq 1}(\#(y).\varphi')$ und behandeln diese laut dem folgenden Fall 3.

<u>Fall 3:</u> φ ist von der Form $P\big(\#(y).\, \varphi'\big)$ mit $P \in \mathcal{P} \cup \{N_{\geq 1}\}$. Wegen $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ ist $\text{frei}(\varphi') \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$

Gemäß Induktionsannahme können wir eine zu $\varphi'(\bar{x}, y)$ d-äquivalente HNF-Formel $\psi'(\bar{x}, y)$ mit $\text{frei}(\psi') = \{x_1, \dots, x_n, y\}$ konstruieren.

F.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ vom Grad $\leq d$ und alle $\bar{a} \in A^n$ gilt:

$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$

$\iff \left(\#(y).\, \varphi'(\bar{x},y)\right)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in P$

$\iff \left(\#(y).\, \psi'(\bar{x},y)\right)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in P.$ $\quad (*)_1$

Da $\psi'(\bar{x},y)$ eine HNF-Formel ist, ist sie insbes. eine Boolesche Kombination Sätzen der Signatur σ und von Formeln der Form $\mathrm{sph}_{\tau,r'}(z_1,\dots,z_{n'})$ mit $r' \geq 0$, $1 \leq n' \leq n+1$, $z_1,\dots,z_{n'} \in \{x_1,\dots,x_n,y\}$, τ ein r'-Typ mit n' Zentren über σ vom Grad $\leq d$.

Sei $\chi_1,\dots,\chi_s$ eine Liste aller in dieser Booleschen Kombination vorkommenden Sätze, und sei r das maximale in $\psi'(\bar{x},y)$ vorkommende r'.

Wir wenden Lemma 1.7 auf die Formel $\psi'(\bar{x},y)$ an. Für jedes $J \subseteq [s]$ ist $\psi'_J(\bar{x},y)$ die Formel, die aus $\psi'(\bar{x},y)$ entsteht, indem jedes Vorkommen eines Satzes χ_j ersetzt wir durch $\begin{cases} \text{true} & \text{falls } j \in J, \\ \text{false} & \text{falls } j \notin J. \end{cases}$

Lemma 1.7 liefert uns für jedes $J \subseteq [s]$ eine Menge $I_J \subseteq [\ell]$, so dass

$$\psi'_J(\bar{x}, y) \equiv_d \bigvee_{i \in I_J} sph_{\tau_i, r}(\bar{x}, y). \qquad \circledast_2$$

Hierbei ist $\tau_1, \ldots, \tau_\ell := \mathcal{L}_r^{\sigma, d}(n+1)$.

Betrachte ein beliebiges $J \subseteq [s]$.

Sei $\chi_J := \bigwedge_{j \in J} \chi_j \wedge \bigwedge_{j \in [s] \setminus J} \neg \chi_j$.

F.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ vom Grad $\leq d$ und alle $\bar{a} \in A^n$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \chi_J \text{ und } \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$$

$$\underset{\circledast_1}{\iff} \mathcal{A} \models \chi_J \text{ und } \left(\#(y).\, \psi'(\bar{x}, y)\right)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in P$$

$$\underset{\text{Def. } \psi'_J}{\iff} \mathcal{A} \models \chi_J \text{ und } \left(\#(y).\, \psi'_J(\bar{x}, y)\right)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in P$$

$$\underset{\circledast_2}{\iff} \mathcal{A} \models \chi_J \text{ und } \left(\#(y).\, \bigvee_{i \in I_J} sph_{\tau_i, r}(\bar{x}, y)\right)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in P$$

$$\iff \mathcal{A} \models \chi_J \text{ und } \sum_{i \in I_J} \left(\#(y).\, sph_{\tau_i, r}(\bar{x}, y)\right)^{\mathcal{A}}[\bar{a}] \in P$$

$\circledast_3$

Fall 3.1: $n=0$, dh $\bar{x}=()$. Dann ist

$$\hat{t}_J := \sum_{i\in I_J} \#(y).\, sph_{\tau_i,r}(y) \quad \text{ein}$$

einfacher Zählterm der Signatur σ, und es gilt:

$$\varphi \equiv \bigvee_{J\subseteq[s]} \left(\chi_J \wedge \varphi \right)$$

$$\underbrace{\underset{(*)_3}{\equiv_d} \bigvee_{J\subseteq[s]} \left(\chi_J \wedge P\Big(\sum_{i\in I_J} \#(y).\, sph_{\tau_i,r}(y) \Big) \right)}_{=:\ \psi}$$

— und dies ist eine HNF-Formel mit $frei(\psi)=\emptyset$, wie gewünscht!

Fall 3.2: $n>0$.

Für jedes $i\in[e]$ wende Lemma 1.6 auf den Zählterm

$$t_i(\bar{x}) := \#(y).\, sph_{\tau_i,r}(\bar{x},y)$$

an. Setze $R' := R := 3r+1$. Für jedes $\rho\in \mathcal{L}^{\sigma,d}_{R'}(n)$ liefert Lemma 1.6 einen einfachen Zählterm $\hat{t}_{i,\rho}$ der Signatur σ, s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Tupel $\bar{a}\in A^n$ vom R'-Typ ρ in $\mathcal{A}$ gilt:

$$t_i^{\mathcal{A}}[\bar{a}] = \hat{t}_{i,\rho}^{\ \mathcal{A}}. \qquad (*)_4$$

Außerdem ist $\hat{t}_{i,\varrho}$ entweder eine nat. Zahl oder von der Form $\#(y).\,\mathrm{sph}_{\tau_i,r}(y)$ mit $\tau \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$.

Insgesamt gilt für $L := \mathcal{L}_{R'}^{\sigma,d}(n)$:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(\bar{x}) \\
\equiv_d\ & \bigvee_{\varrho\in L} \big(\mathrm{sph}_{\varrho,R'}(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{x}) \big) \\
\equiv\ & \bigvee_{\varrho\in L} \Big(\mathrm{sph}_{\varrho,R'}(\bar{x}) \wedge \bigvee_{J\subseteq[s]} \big(\chi_J \wedge \varphi(\bar{x})\big)\Big) \\
\underset{\circledast_3}{\equiv_d}\ & \bigvee_{\varrho\in L} \Big(\mathrm{sph}_{\varrho,R'}(\bar{x}) \wedge \bigvee_{J\subseteq[s]} \Big(\chi_J \wedge P\Big(\sum_{i\in I_J} \underbrace{\#(y).\,\mathrm{sph}_{\tau_i,r}(\bar{x},y)}_{=t_i(\bar{x})}\Big)\Big)\Big) \\
\underset{\circledast_4}{\equiv_d}\ & \underbrace{\bigvee_{\varrho\in L} \Big(\mathrm{sph}_{\varrho,R'}(\bar{x}) \wedge \bigvee_{J\subseteq[s]} \Big(\chi_J \wedge P\Big(\sum_{i\in I_J} \hat{t}_{i,\varrho}\Big)\Big)\Big)}_{=:\ \psi(\bar{x})}
\end{aligned}
$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sich $\sum_{i\in I_J} \hat{t}_{i,\varrho}$ als einfachen Zählterm darstellen lässt (Details: Übungsaufgabe!). Somit können wir $P(\sum_{i\in I_J} \hat{t}_{i,\varrho})$ als Hanf-Zählsatz auffassen und erhalten insgesamt, dass $\psi(\bar{x})$ eine zu φ d-äquivalente HNF-Formel mit $\mathrm{frei}(\psi) = \{x_1,\dots,x_n\}$ ist.

$\square$ Theorem 1.5