Induktive Beweise und rekursive Definitionen

Übung **Logik in der Informatik**
HU Berlin

2. Übungsstunde

Programm für heute

Rekursive Definition von Mengen

Rekursive Definition von Funktionen

Induktion über $\mathbb{N}$

Koinzidenzlemma für AL

Programm für heute

Rekursive Definition von Mengen

Rekursive Definition von Funktionen

Induktion über $\mathbb{N}$

Koinzidenzlemma für AL

Rekursive Definition von Mengen

Eine rekursive Definition einer Menge M besteht aus:

Basisregeln der Form "$m \in M$"

Rekursiven Regeln der Form

"Sind $m_1, \ldots, m_k \in M$, dann ist auch $m \in M$",

wobei m von $m_1, \ldots, m_k$ abhängt.

Rekursive Definition von Mengen (Beispiel)

Die Menge L aller Zeichenketten über dem Alphabet

$$A \;:=\; \{\mathbf{x}, :=, +, -, \neq, ;, \mathbf{while}, \mathbf{do}, \mathbf{end}\} \cup \mathbb{N},$$

die syntaktisch korrekte WHILE-Programme sind, ist wie folgt definiert:

Basisregeln:

(B1) Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j + c \;\in L$.

(B2) Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j - c \;\in L$.

Rekursive Regeln:

(R1) Sind $w_1 \in L$ und $w_2 \in L$, so ist auch $w_1 ; w_2 \;\in L$.

(R2) Ist $w \in L$ und $i \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbf{while}\ \mathbf{x}i \neq \mathbf{0}\ \mathbf{do}\ w\ \mathbf{end} \;\in L$.

Rekursive Definition von Mengen

Zur Erinnerung: *Die Menge L aller syntaktisch korrekten WHILE-Programme ist rekursiv wie folgt definiert:*

Basisregeln:

(B1) *Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt:* $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j + c \in L$.

(B2) *Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt:* $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j - c \in L$.

Rekursive Regeln:

(R1) *Sind $w_1 \in L$ und $w_2 \in L$, so ist auch* $w_1 ; w_2 \in L$.

(R2) *Ist $w \in L$ und $i \in \mathbb{N}$, so ist* $\mathbf{while}\ \mathbf{x}i \neq \mathbf{0}\ \mathbf{do}\ w\ \mathbf{end} \in L$.

Aufgabe 1:

Welche der folgenden Zeichenketten gehört zur Menge L aller syntaktisch korrekten WHILE-Programme, welche nicht?

(1) $\mathbf{x}3 := \mathbf{x}7 - 2$

(2) $\mathbf{x}3 := 1;\ \mathbf{x}2 := \mathbf{x}3 + 5$

(3) $\mathbf{while}\ \mathbf{x}1 \neq 0\ \mathbf{do}\ \mathbf{x}0 := \mathbf{x}0 + 1;\ \mathbf{x}1 := \mathbf{x}1 - 1\ \mathbf{end}$

(4) $\mathbf{x}1 := \mathbf{x}1 + 42;\ \mathbf{while}\ \mathbf{x}1 \neq 0\ \mathbf{do}\ \mathbf{x}1 := \mathbf{x}1 - 1$

Programm für heute

Rekursive Definition von Mengen

Rekursive Definition von Funktionen

Induktion über $\mathbb{N}$

Koinzidenzlemma für AL

Rekursive Definition von Funktionen

Sei M eine rekursiv definierte Menge und sei P eine beliebige Menge.

Die rekursive Definition einer Funktion $f: M \to P$ sieht folgendermaßen aus:

Rekursionsanfang:
Für jede Basisregel der Form "$m \in M$" in der Definition von M, definiere $f(m) \in P$.

Rekursionsschritt:
Für jede rekursive Regel der Form

$$\text{"Sind } m_1, \ldots, m_k \in M\text{, dann ist auch } m \in M\text{"}$$

in der Definition von M, definiere $f(m) \in P$ aus $f(m_1), \ldots, f(m_k)$.

Rekursive Definition von Funktionen, Beispiel (1)

Zur Erinnerung: Die Menge L aller syntaktisch korrekten WHILE-Programme ist rekursiv wie folgt definiert:

Basisregeln:

(B1) Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j + c \;\in L$.

(B2) Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j - c \;\in L$.

Rekursive Regeln:

(R1) Sind $w_1 \in L$ und $w_2 \in L$, so ist auch $w_1 ; w_2 \;\in L$.

(R2) Ist $w \in L$ und $i \in \mathbb{N}$, so ist $\textbf{while } \mathbf{x}i \neq \mathbf{0} \textbf{ do } w \textbf{ end} \;\in L$.

Aufgabe 2:

Definiere Funktionen $f : L \to \mathbb{N}$ und $g : L \to \mathbb{N}$ rekursiv, so dass für alle $w \in L$ gilt:

$$f(w) := \quad \text{Anzahl der ``}:=\text{'' in } w,$$

$$g(w) := \quad \text{Anzahl der ``};\text{'' in } w.$$

Rekursive Definition von Funktionen, Beispiel (2)

Zur Erinnerung: Die Menge L aller syntaktisch korrekten WHILE-Programme ist rekursiv wie folgt definiert:

Basisregeln:

(B1) Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j + c \in L$.

(B2) Für Zahlen $i, j, c \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbf{x}i := \mathbf{x}j - c \in L$.

Rekursive Regeln:

(R1) Sind $w_1 \in L$ und $w_2 \in L$, so ist auch $w_1 ; w_2 \in L$.

(R2) Ist $w \in L$ und $i \in \mathbb{N}$, so ist **while** $\mathbf{x}i \neq \mathbf{0}$ **do** w **end** $\in L$.

Aufgabe 3:

Zeige, dass für alle $w \in L$ gilt:

$$f(w) \quad \geq \quad g(w) + 1.$$

Programm für heute

Rekursive Definition von Mengen

Rekursive Definition von Funktionen

Induktion über $\mathbb{N}$

Koinzidenzlemma für AL

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage über die Zahl n.

Ziel: Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ gilt.

Ansatz: Nutze das Induktionsprinzip:

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Falls } \underbrace{A(0), \ldots, A(n)}_{\text{Induktionsannahme}} \text{ gelten, so auch } A(n+1).$$

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:

Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:

Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Dann gilt:

$A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Dann gilt:

$A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$ ist wahr da $A(0)$ gilt und wegen dem Induktionsschritt für $n = 0$.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Dann gilt:

$A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$ ist wahr da $A(0)$ gilt und wegen dem Induktionsschritt für $n = 0$.

$A(2)$ ist wahr da $A(0)$ und $A(1)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 1$.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Dann gilt:

$A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$ ist wahr da $A(0)$ gilt und wegen dem Induktionsschritt für $n = 0$.

$A(2)$ ist wahr da $A(0)$ und $A(1)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 1$.

$A(3)$ ist wahr da $A(0), A(1)$ und $A(2)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 2$.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Dann gilt:

$A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$ ist wahr da $A(0)$ gilt und wegen dem Induktionsschritt für $n = 0$.

$A(2)$ ist wahr da $A(0)$ und $A(1)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 1$.

$A(3)$ ist wahr da $A(0), A(1)$ und $A(2)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 2$.

$A(4)$ ...

... und so weiter.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$: Grundidee

Induktionsanfang:
Zeige, dass $A(n)$ für die Zahl $n = 0$ gilt.

Induktionsschritt:
Zeige, dass für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Falls $A(0), \ldots, A(n)$ gelten, so auch $A(n+1)$.

Dann gilt:

$A(0)$ ist wahr gemäß Induktionsanfang.

$A(1)$ ist wahr da $A(0)$ gilt und wegen dem Induktionsschritt für $n = 0$.

$A(2)$ ist wahr da $A(0)$ und $A(1)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 1$.

$A(3)$ ist wahr da $A(0), A(1)$ und $A(2)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für $n = 2$.

$A(4)$ ... *... und so weiter.*

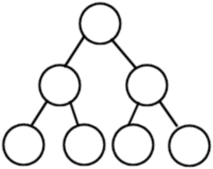
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt also:

$A(n+1)$ ist wahr da $A(0), \ldots, A(n)$ gelten
und wegen dem Induktionsschritt für n.

Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$

Aufgabe 4:
Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

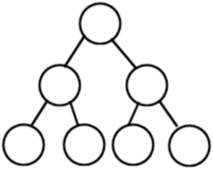
$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \quad = \quad 2^{n+1} - 1.$$



Beweis durch vollständige Induktion über $\mathbb{N}$

Aufgabe 4:
Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \quad = \quad 2^{n+1} - 1.$$



Aufgabe 5:
Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$(1 + x)^n \quad \geq \quad 1 + n \cdot x.$$

Programm für heute

Rekursive Definition von Mengen

Rekursive Definition von Funktionen

Induktion über $\mathbb{N}$

Koinzidenzlemma für AL

Koinzidenzlemma für AL

Notation:
Für eine Menge M schreiben wir 2^M oder $\mathcal{P}(M)$ um die Potenzmenge von M zu bezeichnen, d.h. die Menge aller Teilmengen von M.

Aufgabe 6:

Gib die rekursive Definition einer Funktion $as\colon \mathrm{AL} \to \mathcal{P}(\mathrm{AS})$ an, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$as(\varphi) \; = \{X : X \text{ ist ein Aussagensymbol, das in } \varphi \text{ vorkommt}\}.$$

Koinzidenzlemma für AL

Notation:
Für eine Menge M schreiben wir 2^M oder $\mathcal{P}(M)$ um die Potenzmenge von M zu bezeichnen, d.h. die Menge aller Teilmengen von M.

Aufgabe 6:
Gib die rekursive Definition einer Funktion $as\colon \mathrm{AL} \to \mathcal{P}(\mathrm{AS})$ an, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$as(\varphi) \ = \{X\colon X \text{ ist ein Aussagensymbol, das in } \varphi \text{ vorkommt}\}.$$

Aufgabe 7: *("Koinzidenzlemma für AL")*
Zeige, dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ gilt:
Sind $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\colon \mathrm{AS} \to \{0,1\}$ Interpretationen mit

$$\mathcal{I}_1(X) \quad = \quad \mathcal{I}_2(X) \quad \text{für alle } X \in as(\varphi),$$

dann ist $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}_2}$.