Kapitel 4:

Grundlagen des automatischen Schließens

Ziel: Automatisches Schließen

- In typischen Anwendungen der Logik beschreibt man mit Hilfe einer Formelmenge das Wissen über ein Anwendungsszenario und will aus diesem Wissen dann, möglichst automatisch, Folgerungen ziehen.
- In diesem Kapitel werden wir untersuchen, inwieweit sich für die Logik erster Stufe das Folgern automatiseren lässt.
- Wir werden einen syntaktischen Beweisbegriff einführen, der genau dem semantischen Folgerungsbegriff entspricht (Vollständigkeitssatz).
- Dadurch werden wir einen Algorithmus erhalten, der nach und nach alle allgemeingültigen Sätze der Logik erster Stufe aufzählt.
- Andererseits werden wir zeigen, dass es keinen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines beliebigen Satzes der Logik erster Stufe entscheidet, ob der Satz allgemeingültig ist.
- Als Folgerung aus dem Vollständigkeitssatz werden wir auch den Endlichkeitssatz für die Logik erster Stufe erhalten.

Abschnitt 4.1:

Kalküle und Ableitungen

Ableitungsregeln und Kalküle

Definition 4.1

Sei M eine beliebige Menge.

(a) Eine Ableitungsregel über M (kurz: Regel) hat die Form

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b}$$

wobei $n \geqslant 0$ und $a_1, \ldots, a_n, b \in M$.

Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die Voraussetzungen der Regel und b als die Konsequenz.

Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als Axiome.

(b) Ein Kalkül über M ist eine Menge von Ableitungsregeln über M.

Ableitungen

Definition 4.2

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M, sei $V \subseteq M$ und sei $a \in M$.

(a) Eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M^\ell$, so dass $\ell \geqslant 1$, $a_\ell = a$ und für alle $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ gilt:

- $a_i \in V$ oder
- $\frac{}{a_i}$ ist ein Axiom in $\mathfrak{K}$ oder
- es gibt in $\mathfrak{K}$ eine Ableitungsregel $\frac{b_1 \ \cdots \ b_n}{a_i}$ so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$.

Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir in konkreten Beispielen Ableitungen der Form $(a_1, \ldots, a_\ell)$ oft zeilenweise, also

$$
\begin{array}{ll}
(1) & a_1 \\
(2) & a_2 \\
\vdots & \\
(\ell) & a_\ell
\end{array}
$$

und geben am Ende jeder Zeile eine kurze Begründung an.

(b) Ein Element $a \in M$ ist aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbar, wenn es eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ gibt.

(c) Wir schreiben $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$, um die Menge aller aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente zu bezeichnen.

(d) Für $V = \emptyset$ nutzen wir folgende Notationen:

Eine Ableitung von a in $\mathfrak{K}$ ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Ein Element $a \in M$ heißt ableitbar aus $\mathfrak{K}$, falls es eine Ableitung von a in $\mathfrak{K}$ gibt.

Die Menge aller in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente bezeichnen wir mit $\text{abl}_{\mathfrak{K}}$, d.h.: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} := \text{abl}_{\mathfrak{K}}(\emptyset)$.

Wir werden Kalküle nutzen, um auf elegante Art rekursive Definitionen bestimmter Mengen anzugeben:

Um eine bestimmte Teilmenge A einer Menge M rekursiv zu definieren, genügt es, einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über M anzugeben, für den gilt: $\text{abl}_{\mathfrak{K}} = A$.

Beispiel: Mengen natürlicher Zahlen

Beispiel 4.3

Sei $\mathfrak{K}$ der Kalkül über $M := \mathbb{N}$ mit folgenden Ableitungsregeln:

- Axiom: $\dfrac{}{1}$
- Weitere Regeln: $\dfrac{n}{2n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Fragen:

- Was ist $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}$?
- Was ist $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ für $V := \{3\}$?

Beispiel: Aussagenlogik

Beispiel 4.4

Sei $\Sigma := A_{\mathsf{AL}}$ das Alphabet der Aussagenlogik, d.h.

$$\Sigma \;=\; \mathsf{AS} \,\cup\, \{\, \neg,\, \wedge,\, \vee,\, \to,\, \mathbf{0},\, \mathbf{1},\, (,\,)\,\}\,,$$

wobei $\mathsf{AS} = \{A_i \;:\; i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Aussagensymbole ist.

Gesucht: Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über $M := \Sigma^*$, aus dem genau die syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln ableitbar sind, d.h. $\mathsf{abl}_{\mathfrak{K}} = \mathsf{AL}$.

Beispiel: Resolution

Die Kalkül-Schreibweise lässt sich auch dazu nutzen, eine elegante Darstellung der Resolutionswiderlegungen zu anzugeben.

Zur Erinnerung:

- Eine Klausel ist eine endliche Menge von Literalen.

  Ein Literal ist eine aussagenlogische Formel der Form X oder $\neg X$, wobei $X \in \mathsf{AS}$.

- Wir haben in Satz 2.60 gezeigt, dass für jede Menge Γ von Klauseln gilt:

$$\Gamma \text{ ist unerfüllbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash_R \emptyset.$$

  Hierbei ist $\emptyset$ die leere Klausel.

  „$\Gamma \vdash_R \emptyset$" bedeutet, dass es eine Resolutionswiderlegung von Γ gibt.

  Zur Erinnerung hier die Definition des Begriffs der Resolutionswiderlegungen:

Resolutionsableitungen und -widerlegungen

Definition

Sei Γ eine Klauselmenge.

(a) Eine Resolutionsableitung einer Klausel δ aus Γ ist ein Tupel $(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ von Klauseln, so dass gilt: $\ell \geqslant 1$, $\delta_\ell = \delta$, und für alle $i \in [\ell]$ ist

- $\delta_i \in \Gamma$, oder
- es gibt $j, k \in [i-1]$, so dass δ_i eine Resolvente von δ_j und δ_k ist.

(b) Eine Resolutionswiderlegung von Γ ist eine Resolutionsableitung der leeren Klausel aus Γ.

Zur Erinnerung:

Eine Klausel δ ist genau dann eine Resolvente zweier Klauseln γ_1 und γ_2, wenn es ein Literal λ gibt, so dass gilt:

$$\lambda \in \gamma_1, \qquad \overline{\lambda} \in \gamma_2 \qquad \text{und} \qquad \delta = \big(\gamma_1 \setminus \{\lambda\}\big) \cup \big(\gamma_2 \setminus \{\overline{\lambda}\}\big).$$

Der Resolutionskalkül der Aussagenlogik

Gesucht: Ein Kalkül $\mathfrak{K}_R$ über der Menge aller Klauseln, so dass für jede Klauselmenge Γ und jede Klausel δ gilt:

$$\delta \in \mathsf{abl}_{\mathfrak{K}_R}(\Gamma) \quad \iff \quad \Gamma \vdash_R \delta$$

d.h.: δ ist genau dann aus Γ in $\mathfrak{K}_R$ ableitbar, wenn es eine Resolutionsableitung von δ aus Γ gibt.

Der Kalkül $\mathfrak{K}_R$ wird Resolutionskalkül der Aussagenlogik genannt.

Kalküle und abgeschlossene Mengen

Definition 4.5

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M.
Eine Menge $A \subseteq M$ heißt abgeschlossen unter $\mathfrak{K}$, wenn für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b}$$

in $\mathfrak{K}$ gilt: Falls $a_1, \ldots, a_n \in A$, so ist auch $b \in A$.

Satz 4.6

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$.
Dann ist $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ die bzgl. „$\subseteq$“ kleinste unter $\mathfrak{K}$ abgeschlossene Menge, die V enthält.
D.h. es gilt:

(a) $V \subseteq \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

(b) $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ *ist abgeschlossen unter $\mathfrak{K}$.*

(c) *Für jede Menge A mit $V \subseteq A \subseteq M$ gilt:*
Falls A abgeschlossen ist unter $\mathfrak{K}$, so ist $\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq A$.

(d) $$\mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \;=\; \bigcap_{\substack{V \subseteq A \subseteq M, \\ A \text{ abgeschlossen unter } \mathfrak{K}}} A \;.$$

Induktionsprinzip für die ableitbaren Elemente eines Kalküls

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$. Um zu zeigen, dass eine bestimmte Aussage $\mathbb{A}(a)$ für alle aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente a gilt, können wir das Induktionsprinzip nutzen und einfach Folgendes zeigen:

(1) Die Aussage $\mathbb{A}(a)$ gilt für jedes $a \in V$, und

(2) für jede Ableitungsregel

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b}$$

in $\mathfrak{K}$ gilt: Falls $\mathbb{A}(a_i)$ für jedes $i \in [n]$ gilt, so gilt auch $\mathbb{A}(b)$.

Daraus folgt laut dem nächsten Lemma dann, dass $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$ gilt.

Lemma 4.7

Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge M und sei $V \subseteq M$. Falls

(1) *eine Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in V$ gilt und*

(2) *für jede Ableitungsregel*

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b}$$

in $\mathfrak{K}$ gilt: falls $\mathbb{A}(a_i)$ für jedes $i \in [n]$ gilt, so gilt auch $\mathbb{A}(b)$,

dann gilt die Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \mathrm{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$.

Beweis.

Es seien (1) und (2) erfüllt.

Betrachte die Menge

$$A \;:=\; \{\, a \in M \;:\; \text{die Aussage } \mathbb{A}(a) \text{ gilt} \,\}\,.$$

Wegen (1) ist $V \subseteq A$.

Wegen (2) ist A abgeschlossen unter $\mathfrak{K}$.

Aus Satz 4.6 folgt daher: $\text{abl}_{\mathfrak{K}}(V) \subseteq A$.

Somit gilt die Aussage $\mathbb{A}(a)$ für jedes $a \in \text{abl}_{\mathfrak{K}}(V)$. $\square$

Abschnitt 4.2:

Ein Beweiskalkül für die Logik erster Stufe — der Vollständigkeitssatz

Notation

- In diesem Kapitel sei σ eine beliebige fest gewählte Signatur.
- Der Einfachheit halber werden wir o.B.d.A. in diesem Kapitel nur FO[σ]-Formeln betrachten, in denen das Symbol „$\rightarrow$“ nicht vorkommt.
- $t, u, t_1, t_2, t', u', u'', \ldots$ bezeichnen immer σ-Terme.
- $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ bezeichnen immer FO[σ]-Formeln.
- $\Phi, \Psi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi', \ldots$ bezeichnen immer Mengen von FO[σ]-Formeln.
- $\Gamma, \Delta, \Gamma', \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ bezeichnen immer endliche Mengen von FO[σ]-Formeln.
- Für $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ ist $\text{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{frei}(\varphi)$.

  Manchmal schreiben wir auch $\text{frei}(\Phi, \varphi)$ an Stelle von $\text{frei}(\Phi \cup \{\varphi\})$.
- Ist M eine Menge, so schreiben wir $L \subseteq_e M$, um auszudrücken, dass L eine endliche Teilmenge von M ist.

Sequenzen

Definition 4.8

(a) Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Form

$$\Gamma \vdash \psi$$

wobei $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ (d.h., Γ ist eine endliche Menge von $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln).

Wir bezeichnen Γ als das Antezedens und ψ als das Sukzedens der Sequenz $\Gamma \vdash \psi$.

(b) Wir schreiben M_S um die Menge aller Sequenzen zu bezeichnen, d.h.:

$$M_S \ := \ \{ \ \Gamma \vdash \psi \ : \ \Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma], \ \psi \in \mathrm{FO}[\sigma] \ \}.$$

Korrektheit einer Sequenz

Definition 4.9

Eine Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ heißt korrekt, falls gilt: $\Gamma \models \psi$.

Zur Erinnerung: $\Gamma \models \psi$ bedeutet:

Für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt: Falls $\mathcal{I} \models \Gamma$, so auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Beispiel:

Welche der folgenden Sequenzen sind korrekt für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $x, y \in \mathsf{VAR}$; welche sind nicht korrekt?

(1) $\{\, (\neg\varphi \vee \psi) \,,\, \varphi \,\} \vdash \psi$

(2) $\emptyset \vdash (\varphi \vee \neg\varphi)$

(3) $\{\, \exists x \forall y\, \varphi \,\} \vdash \forall y \exists x\, \varphi$

(4) $\{\, \forall y \exists x\; x{=}y \,\} \vdash \exists x \forall y\; x{=}y$

Ziel

Wir wollen im Folgenden einen Kalkül $\mathfrak{K}$ über M_S angeben, so dass gilt:

(1) $\mathfrak{K}$ ist korrekt, d.h. jede in $\mathfrak{K}$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

(2) $\mathfrak{K}$ ist vollständig, d.h. jede korrekte Sequenz ist in $\mathfrak{K}$ ableitbar.

(3) $\mathfrak{K}$ ist effektiv verifizierbar, d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe einer Zahl $\ell \geqslant 1$ und eines Tupels $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M_S^\ell$ entscheidet, ob $(a_1, \ldots, a_\ell)$ eine Ableitung in $\mathfrak{K}$ ist.

Dies liefert dann insbesondere einen Algorithmus, der nach und nach alle Ableitungen in $\mathfrak{K}$ und somit auch genau die aus $\mathfrak{K}$ ableitbaren Sequenzen aufzählt.

Wegen (1) und (2) werden damit genau die korrekten Sequenzen aufgezählt.

Da für $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ die Sequenz $\emptyset \vdash \psi$ genau dann korrekt ist, wenn ψ allgmeingültig ist, erhalten wir auch direkt einen Algorithmus, der nach und nach alle allgemeingültigen Formeln aufzählt.

Notationen für Sequenzen

Wir schreiben kurz

- $\Gamma, \varphi \vdash \psi$, um die Sequenz $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ zu bezeichnen.
- $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, um die Sequenz $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ zu bezeichnen.
- $\vdash \psi$, um die Sequenz $\emptyset \vdash \psi$ zu bezeichnen.

Sequenzenregeln

Eine Sequenzenregel ist eine Ableitungsregel über M_S.

Sequenzenregeln der Form

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b}$$

schreiben wir meistens zeilenweise, als

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \hline b \end{array}$$

wobei jedes a_i eine Sequenz der Form $\Gamma_i \vdash \psi_i$ ist,
und b eine Sequenz der Form $\Delta \vdash \varphi$ ist.

Definition 4.10

Eine Sequenzenregel

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \vdash \psi_1 \\ \vdots \\ \Gamma_n \vdash \psi_n\end{array}}{\Delta \vdash \varphi}$$

heißt korrekt, wenn Folgendes gilt: Sind die Sequenzen $\Gamma_i \vdash \psi_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ korrekt, so ist auch die Sequenz $\Delta \vdash \varphi$ korrekt.

Aus dem Induktionsprinzip für Kalküle (Lemma 4.7) folgt direkt:

Lemma 4.11

Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ über M_S ist korrekt, falls jede Sequenzenregel in $\mathfrak{K}$ korrekt ist.

Wir werden nun eine Reihe von korrekten Sequenzenregeln zusammentragen, die alle zusammen dann den von uns gesuchten korrekten, vollständigen und effektiven Kalkül über M_S bilden werden.

Grundregeln:

Für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- Voraussetzungsregel (V):

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash \varphi}$$

- Erweiterungsregel (E):

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma' \vdash \varphi} \qquad \text{falls } \Gamma \subseteq \Gamma'$$

Lemma 4.12

Jede der Grundregeln (V) *bzw.* (E) *ist korrekt.*

Ausagenlogische Regeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $\varphi, \psi, \chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- Fallunterscheidungsregel (FU):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma, \psi \quad \vdash \varphi \\ \Gamma, \neg\psi \vdash \varphi \end{array}}{\Gamma \qquad \vdash \varphi}$$

- Widerspruchsregel (W):

$$\frac{\begin{array}{l} \Gamma \vdash \psi \\ \Gamma \vdash \neg\psi \end{array}}{\Gamma \vdash \varphi} \qquad (\text{für alle } \varphi \in \mathsf{FO}[\sigma])$$

- $\wedge$-Einführung im Antezedens $(\wedge A_1)$, $(\wedge A_2)$:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi} \qquad \frac{\Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash \chi}$$

- $\wedge$-Einführung im Sukzedens $(\wedge S)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi)}$$

- $\vee$-Einführung im Antezedens $(\vee A)$:

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma, \varphi \vdash \chi \\ \Gamma, \psi \vdash \chi\end{array}}{\Gamma, (\varphi \vee \psi) \vdash \chi}$$

- $\vee$-Einführung im Sukzedens $(\vee S_1)$, $(\vee S_2)$:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash (\varphi \vee \psi)}$$

Lemma 4.13

Jede der aussagenlogischen Regeln (FU), (W), ($\wedge$A$_1$), ($\wedge$A$_2$), ($\wedge$S), ($\vee$A), ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$) *ist korrekt.*

Substitutionen

Um weitere wichtige Sequenzenregeln einführen zu können, benötigen wir eine Möglichkeit, für eine Variable $x \in \mathrm{VAR}$ und einen σ-Term $t \in \mathrm{T}_\sigma$ eine FO[σ]-Formel φ so zu einer FO[σ]-Formel $\varphi\frac{t}{x}$ abzuändern, dass gilt:

> *Die Formel $\varphi\frac{t}{x}$ sagt über den Term t dasselbe aus, wie die Formel φ über die Variable x.*

Präzise: Es soll für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gelten:

$$\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{x} \quad \iff \quad \mathcal{I}\frac{t}{x} \models \varphi. \tag{4}$$

Dabei ist die σ-Interpretation $\mathcal{I}\frac{t}{x}$ für $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ wie folgt definiert:
$\mathcal{I}\frac{t}{x} := (\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x})$, für $a := [\![t]\!]^{\mathcal{I}}$.

Außerdem soll gelten:

$$\varphi\frac{x}{x} \quad = \quad \varphi. \tag{5}$$

Um zu gewährleisten, dass (4) und (5) gilt, wählen wir zu gegebenem φ, t und x die Formel $\varphi\frac{t}{x}$ wie folgt:

- Falls $t = x$, so setze $\varphi\frac{t}{x} := \varphi$. Andernfalls gehe wie folgt vor:
- Sei $y_1, \ldots, y_\ell$ eine Liste aller Variablen aus $\text{var}(t) \cup \{x\}$, die gebundene Vorkommen in φ besitzen.
- Sei $z_1, \ldots, z_\ell$ eine Liste von Variablen $\neq x$, die *nicht* in φ oder t vorkommen.
- Sei φ' die Formel, die aus φ entsteht, indem für jedes $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ jedes *gebundene* Vorkommen der Variablen y_i ersetzt wird durch die Variable z_i.
- Sei $\varphi\frac{t}{x}$ die Formel, die aus φ' entsteht, indem jedes Vorkommen der Variablen x durch den Term t ersetzt wird.

Lemma 4.14 (Substitutionslemma)

Für jede FO[σ]*-Formel* φ*, jeden* σ*-Term* t*, jede Variable* $x \in$ VAR *und jede* σ*-Interpretation* $\mathcal{I}$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi\frac{t}{x} \quad\iff\quad \mathcal{I}\frac{t}{x} \models \varphi.$$

Beweis.

Übung. $\square$

Wir können nun weitere wichtige Sequenzenregeln formulieren:

Quantorenregeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $\varphi, \psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $x, y \in \mathrm{VAR}$ und alle $t \in \mathrm{T}_\sigma$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- $\forall$-Einführung im Antezedens ($\forall$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{t}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \psi}$$

- $\forall$-Einführung im Sukzedens ($\forall$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \ \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \forall x\varphi} \qquad \text{falls} \quad y \notin \mathrm{frei}(\Gamma, \forall x\varphi)$$

- $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A):

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \psi}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \psi} \qquad \text{falls} \quad y \notin \mathrm{frei}(\Gamma,\ \exists x\varphi,\ \psi)$$

- $\exists$-Einführung im Sukzedens ($\exists$S):

$$\frac{\Gamma \vdash \ \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \vdash \exists x\varphi}$$

Lemma 4.15

Jede der Quantorenregeln $(\forall\text{A})$, $(\forall\text{S})$, $(\exists\text{A})$, $(\exists\text{S})$ *ist korrekt.*

Gleichheitsregeln:

Für alle $\Gamma \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $x \in \mathrm{VAR}$ und alle $t, u \in \mathrm{T}_\sigma$ betrachten wir die folgenden Sequenzenregeln:

- Reflexivität der Gleichheit (G):

$$\frac{}{\Gamma \vdash t{=}t}$$

- Substitutionsregel (S):

$$\frac{\Gamma \qquad\quad \vdash \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma, t{=}u \vdash \varphi\frac{u}{x}}$$

Lemma 4.16

Jede der Gleichheitsregeln (G) *bzw.* (S) *ist korrekt.*

Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ für die Logik erster Stufe

Definition 4.17

Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ist der Kalkül über der Menge M_S aller Sequenzen, der für alle $\Gamma, \Gamma' \subseteq_e \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{FO}[\sigma]$, alle $t, u \in \mathrm{T}_\sigma$ und alle $x, y \in \mathrm{VAR}$ aus

- den Grundregeln (V), (E),
- den aussagenlogischen Regeln

  (FU), (W), ($\wedge$A$_1$), ($\wedge$A$_2$), ($\wedge$S), ($\vee$A), ($\vee$S$_1$), ($\vee$S$_2$),
- den Quantorenregeln ($\forall$A), ($\forall$S), ($\exists$A), ($\exists$S)
- und den Gleichheitsregeln (G), (S)

besteht.

Aus der Korrektheit der Regeln des Sequenzenkalküls (Lemmas 4.12, 4.13, 4.15, 4.16) folgt mit Lemma 4.11:

Satz 4.18

Der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ ist korrekt,
d.h. jede in $\mathfrak{K}_S$ ableitbare Sequenz ist korrekt.

Beispiel: Ableitung von Carrolls Syllogismus

$$\{\,\exists x\, S(x),\ \neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big),\ \forall x\,\big(\neg S(x) \vee G(x)\big)\,\} \models \exists x\,\big(\neg F(x) \wedge G(x)\big)$$

(1)	$S(x), F(x)$	$\vdash$	$S(x)$	(V)
(2)	$S(x), F(x)$	$\vdash$	$F(x)$	(V)
(3)	$S(x), F(x)$	$\vdash$	$S(x) \wedge F(x)$	($\wedge$S) auf (1), (2)
(4)	$S(x), F(x)$	$\vdash$	$\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	($\exists$S) auf (3)
(5)	$S(x), F(x), \neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	$\vdash$	$\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	(E) auf (4)
(6)	$S(x), F(x), \neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	$\vdash$	$\neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	(V)
(7)	$S(x), F(x), \neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	$\vdash$	$\neg F(x)$	(W) auf (5), (6)
(8)	$S(x), \neg F(x), \neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	$\vdash$	$\neg F(x)$	(V)
(9)	$S(x), \neg\exists x\,\big(S(x) \wedge F(x)\big)$	$\vdash$	$\neg F(x)$	(FU) auf (7), (8)

Beispiel: Ableitung von Carrolls Syllogismus

$$\{\,\exists x\, S(x),\ \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)),\ \forall x\,(\neg S(x) \lor G(x))\,\} \models \exists x\,(\neg F(x) \land G(x))$$

(9)	$S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x))$	$\vdash$	$\neg F(x)$	(FU) auf (7), (8)
(10)	$S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)), (\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$\neg F(x)$	(E) auf (9)
(11)	$S(x), \neg S(x)$	$\vdash$	$S(x)$	(V)
(12)	$S(x), \neg S(x)$	$\vdash$	$\neg S(x)$	(V)
(13)	$S(x), \neg S(x)$	$\vdash$	$G(x)$	(W) auf (11), (12)
(14)	$S(x), G(x)$	$\vdash$	$G(x)$	(V)
(15)	$S(x), (\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$G(x)$	($\lor$A) auf (13), (14)
(16)	$S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)), (\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$G(x)$	(E) auf (15)
(17)	$S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)), (\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$(\neg F(x) \land G(x))$	($\land$S) auf (10), (16)
(18)	$S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)), (\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$\exists x\,(\neg F(x) \land G(x))$	($\exists$S) auf (17)
(19)	$S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)), \forall x\,(\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$\exists x\,(\neg F(x) \land G(x))$	($\forall$A) auf (18)
(20)	$\exists x\, S(x), \neg\exists x\,(S(x) \land F(x)), \forall x\,(\neg S(x) \lor G(x))$	$\vdash$	$\exists x\,(\neg F(x) \land G(x))$	($\exists$A) auf (19)

Anhand der Definition der einzelnen Regeln sieht man leicht, dass es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe einer Zahl $\ell \geqslant 1$ und einer Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in M_S^\ell$ entscheidet, ob $(a_1, \ldots, a_\ell)$ eine Ableitung in $\mathfrak{K}_S$ ist.

Das heißt, der Sequenzenkalkül ist effektiv verifizierbar.

Für *abzählbare* Signaturen σ kann man außerdem einen Algorithmus angeben, der nach und nach alle Folgen in $\{(a_1, \ldots, a_\ell) \in M_S^\ell \ : \ \ell \geqslant 1\}$ ausgibt. Daher gibt es auch einen Algorithmus der nach und nach genau die ableitbaren Sequenzen aufzählt.

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass der Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ auch vollständig ist, d.h. dass es für jede *korrekte* Sequenz eine Ableitung in $\mathfrak{K}_S$ gibt.

Beweisbarkeit: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$

Definition 4.19

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$.
Die Formel φ heißt beweisbar aus Φ (kurz: $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$), wenn es ein $\Gamma \subseteq_e \Phi$ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$ ableitbar ist.

Ein Beweis von φ aus Φ ist eine Ableitung einer Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ in $\mathfrak{K}_S$, wobei $\Gamma \subseteq_e \Phi$ ist.

Notation

An Stelle von $\emptyset \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ schreiben wir auch kurz: $\vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls $\mathfrak{K}_S$ (Satz 4.18) folgt:

Korollar 4.20

Für jede $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel* φ *und für jede Formelmenge* $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *gilt:*

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models \varphi.$$

Widerspruchsfreiheit

In der Mathematik nennen wir eine Menge von Aussagen widerspruchsvoll, falls sich daraus ein Widerspruch (d.h. eine bestimmte Aussage und deren Negat) herleiten lässt.
Wenn wir unter „herleiten" einen Beweis im Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}_S$ verstehen, ergibt sich folgender Begriff:

Definition 4.21

Sei $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$.

(a) Φ heißt widerspruchsvoll, falls es eine $\text{FO}[\sigma]$-Formel φ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \neg\varphi$.

(b) Φ heißt widerspruchsfrei, falls Φ nicht widerspruchsvoll ist.

Aus der Korrektheit des Sequenzenkalküls folgt, dass erfüllbare Formelmengen widerspruchsfrei sind:

Korollar 4.22

Für alle $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ gilt: $\quad \Phi$ *erfüllbar* $\quad\Longrightarrow\quad \Phi$ *widerspruchsfrei.*

Eigenschaften widerspruchsvoller Mengen

Lemma 4.23

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Φ *ist widerspruchsvoll.*

(b) *Für jede* $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel* ψ *gilt:* $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \psi$.

Der Vollständigkeitssatz

Satz 4.24

Für alle Signaturen σ, alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

(1) $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} \varphi \iff \Phi \models \varphi$.

(2) Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ Φ *ist erfüllbar.*

Die Richtung „$\Longrightarrow$" von (1) und die Richung „$\Longleftarrow$" von (2) haben wir bereits in Korollar 4.20 und Korollar 4.22 bewiesen.

Die Richtung „$\Longrightarrow$" von (2) wird von dem folgenden, schwer zu beweisenden Erfüllbarkeitslemma bereitgestellt:

Lemma 4.25 (Erfüllbarkeitslemma)

Jede widerspruchsfreie Menge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ ist erfüllbar.

Zum Beweis des Erfüllbarkeitslemmas:

Zur Erinnerung: Das Erfüllbarkeitslemma besagt:

Jede widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ *ist erfüllbar.*

Beweisidee:

Konstruiere eine σ-Interpretation $\mathcal{I}_\Phi = (\mathcal{A}, \beta)$, so dass gilt:

- Das Universum A von $\mathcal{A}$ ist die Menge T_σ aller σ-Terme.
- Für jeden σ-Term t gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} = t$.
- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$, und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ gilt:
$$(t_1, \ldots, t_k) \in R^{\mathcal{A}} \quad \iff \quad \Phi \vdash_{\mathfrak{K}_S} R(t_1, \ldots, t_k)$$

Diese Interpretation $\mathcal{I}_\Phi$ wird Terminterpretation von Φ genannt.
Gemäß Definition erfüllt $\mathcal{I}_\Phi$ alle atomaren Formeln der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ in Φ.
Im Allgemeinen gilt jedoch noch nicht $\mathcal{I}_\Phi \models \Phi$ (betrachte dazu beispielsweise die Formelmenge $\Phi := \{v_0{=}v_1\}$, die offensichtlicherweise erfüllbar ist, für die aber gilt: $\mathcal{I}_\Phi \not\models \Phi$).

Aber nach einigen anspruchsvollen Modifikationen von $\mathcal{I}_\Phi$ erhält man eine Interpretation $\mathcal{I}'_\Phi$ mit $\mathcal{I}'_\Phi \models \Phi$.

Abschnitt 4.3:

Der Endlichkeitssatz

Zur Erinnerung:

Wir haben bereits den Endlichkeitssatz der Aussagenlogik kennen gelernt, der besagt, dass Folgendes für jede Menge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

(1) Φ ist erfüllbar $\iff$ Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar.

(2) $\Phi \models \psi \iff$ Es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ, so dass $\Gamma \models \psi$.

Der Endlichkeitssatz gilt auch für die Logik erster Stufe, d.h. die Aussagen (1) und (2) gelten auch für alle Mengen $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und alle $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

Zum Beweis der Endlichkeitssatzes der Logik erster Stufe nutzen wir den Vollständigkeitssatz sowie das folgende Lemma.

Das syntaktische Endlichkeitslemma

Lemma 4.26

Für jede Signatur σ und jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:

Φ *ist widerspruchsfrei* $\iff$ *Jede endliche Teilmenge von* Φ *ist widerspruchsfrei.*

Der Endlichkeitssatz (auch bekannt als Kompaktheitssatz)

Satz 4.27

Für jede Signatur σ, jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ und jede Formel $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ gilt:

(1) Φ *ist erfüllbar* $\iff$ *Jede endliche Teilmenge von* Φ *ist erfüllbar.*

(2) $\Phi \models \psi \iff$ *Es gibt eine endliche Teilmenge* Γ *von* Φ*, so dass* $\Gamma \models \psi$*.*

Beachte: Die Aussage des Endlichkeitssatzes ist nur für unendliche Formelmengen Φ interessant (für endliche Mengen Φ ist sie trivial).

Erststufige Axiomatisierbarkeit

Definition 4.28

Eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen heißt erststufig axiomatisierbar, falls es eine Menge Φ von $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätzen gibt, so dass gilt: $\mathfrak{C} = \mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$.

Zur Erinnerung:

$\mathsf{MOD}_\sigma(\Phi)$ ist die Klasse aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$, für die gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$.

Definition 4.29

Die Mächtigkeit einer σ-Struktur ist die Mächtigkeit ihres Universums.
Eine σ-Struktur heißt endlich, unendlich, abzählbar, bzw. überabzählbar, wenn ihr Universum die entsprechende Mächtigkeit besitzt.

Beispiel 4.30

Die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen ist erststufig axiomatisierbar.

Wir können den Endlichkeitssatz anwenden, um zu zeigen, dass bestimmte Klassen von Strukturen nicht erststufig axiomatisierbar sind.
Im Folgenden betrachten wir dazu zwei Beispiele: die Nicht-Axiomatierbarkeit der „Endlichkeit“ von Strukturen und die Nicht-Axiomatisierbarkeit von „Graph-Zusammenhang“.

Nicht-Axiomatisierbarkeit der „Endlichkeit“ von Strukturen

Lemma 4.31

Sei Φ eine Menge von $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Sätzen. Falls Φ beliebig große endliche Modelle besitzt (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $|A| \geqslant n$ und $\mathcal{A} \models \Phi$), so besitzt Φ ein unendliches Modell.*

Satz 4.32

Die Klasse aller <u>endlichen</u> σ-Strukturen ist <u>nicht</u> erststufig axiomatisierbar.

Korollar 4.33

Es gibt keine <u>endliche</u> Menge von $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Sätzen, die die Klasse aller <u>unendlichen</u> σ-Strukturen erststufig axiomatisiert.*

Nicht-Axiomatisierbarkeit von „Graph-Zusammenhang“

Satz 4.34

Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen ist nicht erststufig axiomatisierbar.

Der Satz von Löwenheim und Skolem

Unter Verwendung von Teilergebnissen, die beim (in dieser Vorlesung nicht im Detail behandelten) Beweis des Erfüllbarkeitslemmas anfallen, erhält man das folgende Resultat.

Satz 4.35 (Der Satz von Löwenheim und Skolem)

Sei σ eine abzählbare Signatur. Dann hat jede erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{FO}[\sigma]$ ein höchstens abzählbares Modell.

(Hier ohne Beweis)

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Löwenheim und Skolem erhalten wir:

Korollar 4.36

Sei σ eine abzählbare Signatur. Dann ist die Klasse aller <u>*überabzählbaren*</u> *σ-Strukturen* <u>*nicht*</u> *erststufig axiomatisierbar.*

Abschnitt 4.4:

Die Grenzen der Berechenbarkeit

Zur Erinnerung:

Einige Begriffe zum Thema (Un)Entscheidbarkeit

Entscheidungsprobleme sind Probleme, die mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden können. Genauer:

- Sei M eine abzählbar unendliche Menge, zum Beispiel
  - die Menge Σ^* aller Worte über einem endlichen Alphabet Σ, oder
  - die Menge aller Graphen, deren Knotenmenge eine endliche Teilmenge der natürlichen Zahlen ist.

- Das Entscheidungsproblem für eine Menge $L \subseteq M$ ist das folgende Berechnungsproblem:

Das Entscheidungsproblem für $L \subseteq M$

Eingabe: Ein Element $m \in M$.

Frage: Ist $m \in L$?

Beispiele für Entscheidungsprobleme

- Graphzusammenhang ist das Entscheidungsproblem für $L \subseteq M$, wobei
  - M die Menge aller ungerichteten Graphen ist, deren Knotenmenge eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist und
  - L die Menge aller zusammenhängenden Graphen aus M ist.

- Das Halteproblem ist das Entscheidungsproblem für $L \subseteq M$:
  - M ist die Menge aller Worte $w\#x$ mit $w, x \in \{0,1\}^*$, sodass w eine deterministische Turingmaschine beschreibt und
  - L ist die Menge aller Worte $w\#x$, sodass w eine deterministische Turingmaschine beschreibt, die bei Eingabe x nach endlich vielen Schritten anhält.

Entscheidungsprobleme für die Logik erster Stufe

Allgemeingültigkeitsproblem für FO[σ]

Eingabe: Eine FO[σ]-Formel φ

Frage: Ist φ allgemeingültig?

Formal:

M ist die Menge aller Worte über dem Alphabet $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ und

L ist die Menge $\{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma] \ : \ \varphi \text{ ist allgemeingültig}\}$

Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ]

Eingabe: FO[σ]-Formel φ

Frage: Ist φ erfüllbar?

Unerfüllbarkeitsproblem für FO[σ]

Eingabe: FO[σ]-Formel φ

Frage: Ist φ unerfüllbar?

Folgerungsproblem für FO[σ]

Eingabe: Zwei FO[σ]-Formeln φ, ψ

Frage: Gilt $\varphi \models \psi$?

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Definition 4.37

Sei M eine abzählbar unendliche Menge.

(a) Eine Menge $L \subseteq M$ heißt entscheidbar, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$ nach endlich vielen Schritten anhält und
- „ja“ ausgibt, falls $m \in L$
- „nein“ ausgibt, falls $m \notin L$.

(b) $L \subseteq M$ heißt semi-entscheidbar, falls es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $m \in M$
- nach endlich vielen Schritten anhält und „ja“ ausgibt, falls $m \in L$
- nie anhält, falls $m \notin L$.

Beispiele:

- Graphzusammenhang ist entscheidbar (z.B. durch Tiefen- oder Breitensuche).
- Das Halteproblem ist semi-entscheidbar (bei Eingabe von $w\#x$ konstruiere die von w repräsentierte deterministische Turingmaschine und lasse diese mit Eingabe x laufen).
  Ist es auch entscheidbar? Nein! — Das Halteproblem ist das Paradebeispiel eines nicht entscheidbaren Problems.

Einfache Beobachtungen

- Jede entscheidbare Menge $L \subseteq M$ ist auch semi-entscheidbar (anstatt „nein" auszugeben und anzuhalten, gehen wir einfach in eine Endlosschleife)

- Für jede entscheidbare Menge $L \subseteq M$ ist auch die Menge $\overline{L} := (M \setminus L) \subseteq M$ entscheidbar (vertausche einfach die Antworten „ja" und „nein")

- Wenn sowohl $L \subseteq M$ als auch $\overline{L} := (M \setminus L) \subseteq M$ semi-entscheidbar sind, dann ist $L \subseteq M$ sogar entscheidbar.

Semi-Entscheidbarkeit einiger Logik-Probleme

Satz 4.38

Sei σ eine höchstens abzählbare Signatur.
Jedes der folgenden Probleme ist semi-enscheidbar:

(a) *das Allgemeingültigkeitsproblem für* $\mathsf{FO}[\sigma]$,

(b) *das Unerfüllbarkeitsproblem für* $\mathsf{FO}[\sigma]$,

(c) *das Folgerungsproblem für* $\mathsf{FO}[\sigma]$.

Unentscheidbarkeit einiger Logik-Probleme

Unser nächstes Ziel ist, zu zeigen, dass für bestimmte Signaturen σ gilt:

- Das Allgemeingültigkeitsproblem für FO[σ],
- das Unerfüllbarkeitsproblem für FO[σ],
- das Erfüllbarkeitsproblem für FO[σ] und
- das Folgerungsproblem für FO[σ]

ist nicht entscheidbar.

Wir werden dazu wie folgt vorgehen:

1. Wir nutzen das bekannte Resultat, das besagt, dass das Postsche Korrespondenzproblem unentscheidbar ist.
2. Wir zeigen, wie das Postsche Korrespondenzproblem unter Zuhilfenahme eines Entscheidungs-Algorithmus für das Allgemeingültigkeitsproblem für FO[σ] (für eine geeignete Signatur σ) gelöst werden könnte.
   Dadurch erhalten wir, dass das Allgemeingültigkeitsproblem für FO[σ] unentscheidbar ist.
3. Die Unentscheidbarkeit des Unerfüllbarkeitsproblems, des Erfüllbarkeitsproblems und des Folgerungsproblems für FO[σ] folgen dann leicht aus der Unentscheidbarkeit des Allgemeingültigkeitsproblems für FO[σ].

Das Postsche Korrespondenzproblem

Das Postsche Korrespondenzproblem (PKP)

Eingabe: Eine Zahl $k \geqslant 1$ und k Paare (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_k, y_k) mit $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k \in \{0,1\}^*$.

Frage: Gibt es ein $n \geqslant 1$ und Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, so dass gilt: $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} \; = \; y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$?

Beispiel:

Das PKP mit Eingabe $k = 3$ und

$$(x_1, y_1) \;=\; (\,1,\;111\,), \qquad (x_2, y_2) \;=\; (\,10111,\;10\,), \qquad (x_3, y_3) \;=\; (\,10,\;0\,).$$

hat eine Lösung mit $n = 4$ und $i_1 = 2$, $i_2 = 1$, $i_3 = 1$, $i_4 = 3$, denn:

$$\begin{aligned} x_2\, x_1\, x_1\, x_3 \quad &= \quad 10111\;\;1\;\;1\;\;10 \\ y_2\, y_1\, y_1\, y_3 \quad &= \quad 10\;\;111\;\;111\;\;0. \end{aligned}$$

Bekannt:

- Das PKP ist semi-entscheidbar. (Dies sieht man leicht.)
- Das PKP ist nicht entscheidbar.
  (Dies wurde in der „Einführung in die Theoretische Informatik“ bewiesen.)

Die Unentscheidbarkeit der Logik erster Stufe

Satz 4.39

Sei $\sigma := \{R, f_0, f_1, c\}$, *wobei* c *ein Konstantensymbol,* R *ein 2-stelliges Relationssymbol und* f_0, f_1 *zwei 1-stellige Funktionssymbole sind.*

Das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\sigma]$ *ist nicht entscheidbar.*

Beweis: Auf Grund der Unentscheidbarkeit des PKP reicht es, eine Reduktion vom PKP zum Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\sigma]$ anzugeben. D.h. wir zeigen, dass bei Eingabe eines Tupels $I = \big(\, k,\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_k, y_k)\,\big)$, das eine Eingabe für's PKP repräsentiert, eine $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ_I konstruiert werden kann, die genau dann allgemeingültig ist, wenn I eine „ja"-Instanz für's PKP ist (d.h. es gibt $n \geqslant 1$ und $i_1, \ldots, i_n \in [k]$, so dass $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$).

Wenn das Allgemeingültigkeitsproblem für $\mathrm{FO}[\sigma]$ entscheidbar wäre, wäre daher auch das PKP entscheidbar.

Zur Konstruktion der Formel φ_I gehen wir in mehreren Schritten vor.

Schritt 1: Für jede Eingabe $I = \big(k,\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_k, y_k) \big)$ für das PKP definiere eine σ-Struktur $\mathcal{A}_I$, so dass gilt:

$\mathcal{A}_I \models \exists z\, R(z,z) \iff$ I ist eine „ja“-Instanz für's PKP, d.h. es gibt $n \geqslant 1$ und $i_1, \ldots, i_n \in [k]$, so dass $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} \cdots y_{i_n}$.

Schritt 2: Konstruiere FO[σ]-Formeln ψ_I^{Start} und $\psi_I^{Schritt}$:

- ψ_I^{Start} besagt, dass die Relation $R^{\mathcal{A}_I}$ die Tupel (x_j, y_j) für alle $j \in [k]$ enthält.
- $\psi_I^{Schritt}$ besagt, dass $R^{\mathcal{A}_I}$ abgeschlossen ist unter Konkatenation mit (x_j, y_j); d.h.: Ist $(u, v) \in R^{\mathcal{A}_I}$ und $j \in [k]$, so ist auch $(ux_j, vy_j) \in R^{\mathcal{A}_I}$.

Schritt 3: Setze $\varphi_I := \Big(\big(\psi_I^{Start} \wedge \psi_I^{Schritt}\big) \to \exists z\, R(z,z) \Big)$

Behauptung:

φ_I ist allgemeingültig $\iff$ $\mathcal{A}_I \models \varphi_I$ $\iff$ I ist „ja“-Instanz für's PKP.

Aus Satz 4.38, Satz 4.39 und den bekannten Zusammenhängen zwischen semi-entscheidbaren und entscheidbaren Problemen, sowie den Korrespondenzen zwischen Allgemeingültigkeit, (Un)Erfüllbarkeit und logischer Folgerung, erhält man leicht:

Korollar 4.40

Sei σ die Signatur aus Satz 4.39. Dann gilt:

(a) *Das Allgemeingültigkeitsproblem für* $\mathrm{FO}[\sigma]$ *ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.*

(b) *Das Folgerungsproblem für* $\mathrm{FO}[\sigma]$ *ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.*

(c) *Das Unerfüllbarkeitsproblem für* $\mathrm{FO}[\sigma]$ *ist semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar.*

(d) *Das Erfüllbarkeitsproblem für* $\mathrm{FO}[\sigma]$ *ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis: Übung.

Bemerkung 4.41

Man kann zeigen, dass

(1) Korollar 4.40 für jede Signatur σ gilt, die mindestens ein Relationssymbol der Stelligkeit $\geqslant 2$ enthält

(2) für Signaturen σ, die ausschließlich aus Konstantensymbolen und Relationssymbolen der Stelligkeit 1 bestehen, jedes der in Korollar 4.40 betrachteten Probleme entscheidbar ist.

(Hier ohne Beweis)

Abschnitt 4.5:

Der Satz von Herbrand

- Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass es keinen Algorithmus gibt, der das Erfüllbarkeitsproblem und das Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe löst und stets terminiert.

- Trotzdem möchte man für verschiedene Anwendungsbereiche Verfahren haben, die das Erfüllbarkeits- oder das Allgemeingültigkeitsproblem der Logik erster Stufe „so gut wie möglich" lösen.

- Einen Ansatz für die Entwicklung solcher, in der Praxis nutzbarer, Verfahren liefert die Herbrand-Theorie, die nach dem französischen Logiker Jacques Herbrand (1908–1931) benannt ist.

- Ziel dieses Abschnitts ist, den Satz von Herbrand vorzustellen, der das Allgemeingültigkeits- bzw. das Erfüllbarkeitsproblem der Logik erster Stufe auf das entsprechende Problem der Aussagenlogik zurückführt.

Notationen

- In diesem Abschnitt bezeichnet σ stets eine endliche oder abzählbare Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.

- Die Menge aller quantorenfreien FO[σ]-Formeln bezeichnen wir mit QF_σ.

- Ein Grundterm über σ ist ein variablenfreier σ-Term, d.h., ein σ-Term, der keine Variable enthält.
  Die Menge aller Grundterme über σ bezeichnen wir mit GT_σ.

Beispiele:

(a) Sei $\sigma := \{ c,\ f/1,\ g/2,\ R/2 \}$.
Grundterme über σ sind dann z.B.

$$c, \quad f(c), \quad g(c,c), \quad f(f(c)), \quad f(g(c,c)), \quad g(c,f(c)), \quad g(f(c),c), \quad \dots$$

(b) Sei $\sigma := \{ c,\ R/2 \}$.
Dann ist c der einzige Grundterm über σ. D.h.

$$\mathrm{GT}_\sigma \quad = \quad \{ c \}.$$

Herbrandstrukturen

Definition 4.42

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.
Eine σ-Herbrandstruktur ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Das Universum A von $\mathcal{A}$ ist genau die Menge GT_σ aller Grundterme über σ (d.h. aller variablenfreien σ-Terme).
- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c^{\mathcal{A}} = c$.
- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(f)$, und für alle variablenfreien σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in A$ ist

$$f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_k) \quad = \quad f(t_1, \ldots, t_k).$$

Beachte: Alle σ-Herbrandstrukturen haben dasselbe Universum und dieselbe Interpretation der Konstanten- und Funktionssymbole.

Lediglich die Interpretation der Relationssymbole kann in σ-Herbrandstrukturen frei gewählt werden.

Zur Angabe einer konkreten σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ genügt es also, die Interpretation der Relationssymbole anzugeben, d.h. für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ die Relation $R^{\mathcal{A}}$ anzugeben.

Beispiel

Sei $\sigma := \{ c,\ R/2 \}$.

Frage: Wie sehen σ-Herbrandstrukturen aus?

Antwort: Für jede σ-Herbrandstruktur $\mathcal{A}$ gilt:

- Universum: $A = \{ c \}$
- $c^{\mathcal{A}} = c$
- $R^{\mathcal{A}} \subseteq \{c\}^2$, d.h.

$$R^{\mathcal{A}} = \emptyset \qquad \text{oder} \qquad R^{\mathcal{A}} = \{ (c, c) \}.$$

Somit gibt es genau 2 verschiedene σ-Herbrandstrukturen.

Bemerkung 4.43

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Herbrandstruktur.
Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

- Für jeden variablenfreien σ-Term t (d.h. für jedes $t \in \mathrm{GT}_\sigma = A$) gilt:

$$[\![t]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad t\,.$$

- Für jede quantorenfreie FO[σ]-Formel ψ gilt:
  Ist $\mathrm{var}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und sind $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{GT}_\sigma$, so gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[t_1, \ldots, t_n] \qquad \iff \qquad \mathcal{A} \models \psi\tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}$$

  Dabei ist $\psi\tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n}$ die Formel, die aus ψ entsteht, indem für jedes $i \in [n]$ jedes Vorkommen von x_i ersetzt wird durch den Grundterm t_i.

Herbrand-Modelle und gleichheitsfreie Formeln in Skolemform

Definition 4.44

(a) Ein Herbrand-Modell eines FO[σ]-Satzes φ ist eine σ-Herbrandstruktur, die φ erfüllt.

(b) Eine FO[σ]-Formel φ heißt gleichheitsfrei, falls das Symbol „$=$“ nicht in φ vorkommt.

(c) Eine FO[σ]-Formel ist in Skolemform (auch: Skolem-Normalform), falls sie von der Form

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \; \psi$$

ist, wobei gilt: $n \geqslant 0$, $x_1, \ldots, x_n$ sind paarweise verschiedene Variablen, und ψ ist eine quantorenfreie FO[σ]-Formel.

Satz 4.45

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol besitzt.
Für jeden gleichheitsfreien FO[σ]*-Satz φ in Skolemform gilt:*

$$\varphi \text{ ist erfüllbar} \iff \varphi \text{ besitzt ein Herbrand-Modell.}$$

Die Herbrand-Expansion eines Satzes in Skolemform

Definition 4.46

Sei φ ein gleichheitsfreier FO[σ]-Satz in Skolemform, d.h. φ ist von der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n \, \psi$, wobei ψ quantorenfrei und gleichheitsfrei ist.
Die Herbrand-Expansion von φ ist die Formelmenge

$$\mathrm{HE}(\varphi) \quad := \quad \left\{ \ \psi \, \tfrac{t_1,\ldots,t_n}{x_1,\ldots,x_n} \ : \ t_1,\ldots,t_n \in \mathrm{GT}_\sigma \ \right\}$$

D.h.: Jede Formel in HE(φ) entsteht, indem in der quantorenfreien Formel ψ jede Variable x_i ersetzt wird durch einen Grundterm t_i.

Beispiel 4.47

Sei $\sigma = \{ c, \ f/1, \ g/2, \ R/3 \}$ und sei $\varphi := \forall x \, \forall y \, \forall z \, R\big(x, f(y), g(z,x)\big)$.
Dann gehören z.B. die folgenden Formeln zur Herbrand-Expansion HE(φ):

- $R(c, f(c), g(c,c))$ (dies erhält man, indem jede der Variablen x, y, z durch den Grundterm c ersetzt wird)
- $R(f(c), f(c), g(c, f(c)))$ (dies erhält man, indem x durch den Grundterm $f(c)$ und jede der Variablen y, z durch den Grundterm c ersetzt wird)
- $R(g(c,c), f(f(c)), g(c, g(c,c)))$ (dies erhält man, indem Variable x durch den Grundterm $g(c,c)$, Variable y durch den Grundterm $f(c)$ und Variable z durch den Grundterm c ersetzt wird)

Die aussagenlogische Version der Herbrand-Expansion

Für jeden gleichheitsfreien FO[σ]-Satz φ in Skolemform gilt:

Jede Formel $\xi \in \mathrm{HE}(\varphi)$ ist quantorenfrei, gleichheitsfrei und variablenfrei, und jede atomare Subformel von ξ ist von der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$, wobei $R \in \sigma$, $k = \mathrm{ar}(R)$ und $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{GT}_\sigma$.

Für jede solche atomare Formel stellen wir ein Aussagensymbol $X_{R(t_1,\ldots,t_k)} \in$ AS bereit.

Für jedes $\xi \in \mathrm{HE}(\varphi)$ sei $\mathrm{al}(\xi)$ die aussagenlogische Formel, die aus ξ entsteht, indem jede atomare Subformel der Form $R(t_1, \ldots, t_k)$ ersetzt wird durch das Aussagensymbol $X_{R(t_1,\ldots,t_k)}$.

Die aussagenlogische Version der Herbrand-Expansion von φ ist die Menge

$$\mathrm{AHE}(\varphi) \quad := \quad \{\, \mathrm{al}(\xi) \;:\; \xi \in \mathrm{HE}(\varphi) \,\}.$$

Der Satz von Herbrand

Satz 4.48 (Satz von Gödel-Herbrand-Skolem)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält.
Für jeden gleichheitsfreien FO[σ]*-Satz φ in Skolemform gilt:*
φ *ist erfüllbar* $\iff$ *die aussagenlogische Formelmenge* AHE(φ) *ist erfüllbar.*

In Verbindung mit dem Endlichkeitssatz der Aussagenlogik erhalten wir:

Satz 4.49 (Satz von Herbrand)

Sei σ eine Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol enthält. Sei ψ eine gleichheitsfreie und quantorenfreie FO[σ]*-Formel und sei* $\{x_1, \ldots, x_n\} = \text{frei}(\psi)$.
Dann gilt für die FO[σ]*-Sätze* $\varphi := \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \psi$ *und* $\varphi' := \exists x_1 \cdots \exists x_n\, \psi$ *:*

(a) φ *ist erfüllbar* $\iff$ *jede endliche Teilmenge von* AHE(φ) *ist erfüllbar.*

(b) φ *ist unerfüllbar* $\iff$ *es gibt eine endliche Teilmenge von* AHE(φ)*, die unerfüllbar ist.*

(c) φ' *ist allgemeingültig* $\iff$ *es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ und Grundterme $t_{i,1}, \ldots, t_{i,n}$ für alle $i \in [m]$, so dass die folgende Formel allgemeingültig ist:*

$$\bigvee_{i=1}^{m} \psi \frac{t_{i,1}, \ldots, t_{i,n}}{x_1, \ldots, x_n}$$

Anwendung des Satzes von Herbrand

Um nachzuweisen, dass ein gleichheitsfreier FO[σ]-Satz φ in Skolemform unerfüllbar ist, kann man auf Grund des Satzes von Herbrand wie folgt vorgehen:

Für $i = 1, 2, 3, \ldots$ tue Folgendes:

(1) Sei ξ_i die i-te Formel in AHE(φ)
(2) Teste, ob die aussagenlogische Formel $(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_i)$ unerfüllbar ist.
(3) Falls ja, halte an mit Ausgabe „φ ist unerfüllbar"

Man sieht leicht, dass dies ein Semi-Entscheidungsverfahren ist, das eine gegebene Formel φ auf Unerfüllbarkeit testet.

Durch die Einschränkung auf gleichheitsfreie FO[σ]-Sätze in Skolemform scheint dieses Verfahren auf den ersten Blick nur sehr eingeschränkt anwendbar zu sein.

Im Folgenden zeigen wir jedoch, dass jede FO[σ]-Formel in eine zu ihr erfüllbarkeitsäquivalente Formel der richtigen Form transformiert werden kann.

Definition 4.50

Seien σ_1, σ_2 Signaturen und φ_i eine $\mathrm{FO}[\sigma_i]$-Formel, für jedes $i \in \{1,2\}$.
Die Formel φ_2 heißt erfüllbarkeitsäquivalent zu φ_1, falls gilt:

$$\varphi_2 \text{ ist erfüllbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_1 \text{ ist erfüllbar.}$$

Satz 4.51 (Skolemisierung)

Zu jeder Signatur σ gibt es eine Signatur $\hat{\sigma}$, so dass jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ in einen zu φ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien $\mathrm{FO}[\hat{\sigma}]$-Satz $\hat{\varphi}$ in Skolemform transformiert werden kann.

Beispiel 4.52

Die Formel $\forall x\, \exists y\, \forall z\, \exists u\ R(x,y,z,u)$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zum folgenden gleichheitsfreien Satz in Skolemform:

$$\forall x\, \forall z\ R\big(x, f(x), z, g(x,z)\big)$$

Abschnitt 4.6:

Automatische Theorembeweiser

Einfaches Verfahren (ohne Unifikation)

Seien φ und ψ zwei FO[σ]-Formeln.

Ziel: Automatischer Beweis, dass $\varphi \models \psi$ gilt.

Dazu reicht es, zu zeigen, dass die Formel $(\varphi \wedge \neg\psi)$ unerfüllbar ist.

Verfahren:

1. Erzeuge einen zu $(\varphi \wedge \neg\psi)$ erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien FO[$\hat{\sigma}$]-Satz χ in Skolemform (über der erweiterten Signatur $\hat{\sigma}$). Nutze dazu das im Beweis von Satz 4.51 vorgestellte Verfahren.

2. Verwende das auf Folie 373 beschriebene Semi-Entscheidungsverfahren, um zu herauszufinden, ob χ unerfüllbar ist.

Beispiel 4.53

Sei $\sigma := \{R/1, c, f/1\}$,

$$\begin{aligned} \varphi &:= R(c) \;\wedge\; \forall x\, \exists y \left(\left(R(x) \to R(f(f(y))) \right) \vee R(f(x)) \right) \\ \psi &:= \exists x\, R(f(f(x))). \end{aligned}$$

Dann ist $(\varphi \wedge \neg\psi) \;=$

$$R(c) \;\wedge\; \forall x\, \exists y \left(\left(R(x) \to R(f(f(y))) \right) \vee R(f(x)) \right) \;\wedge\; \neg\exists x\, R(f(f(x)))$$

ein gleichheitsfreier Satz. Eine Umformung in Pränex-Normalform liefert den dazu äquivalenten Satz

$$\forall x\, \exists y \Big(R(c) \;\;\wedge\;\; \left(\neg R(x) \;\vee\; R(f(f(y))) \;\vee\; R(f(x)) \right) \;\;\wedge\;\; \neg R(f(f(x))) \Big).$$

Wir erweitern die Signatur um ein 1-stelliges Funktionssymbol g und erhalten den dazu erfüllbarkeitsäquivalenten gleichheitsfreien Satz in Skolemform $\chi \;=$

$$\forall x \Big(R(c) \;\;\wedge\;\; \left(\neg R(x) \;\vee\; R(f(f(g(x)))) \;\vee\; R(f(x)) \right) \;\;\wedge\;\; \neg R(f(f(x))) \Big)$$

über der Signatur $\hat{\sigma} = \{R, c, f, g\}$.

$$\chi \;=\; \forall x \Big(R(c) \;\wedge\; \big(\neg R(x) \vee R(f(f(g(x)))) \vee R(f(x))\big) \;\wedge\; \neg R(f(f(x))) \Big).$$

Für jeden Grundterm $t \in \mathrm{GT}_{\hat{\sigma}}$ enthält die aussagenlogische Variante $\mathrm{AHE}(\chi)$ der Herbrand-Expansion von χ die aussagenlogische Formel

$$\xi_t \;:=\; X_{R(c)} \wedge \big(\neg X_{R(t)} \vee X_{R(f(f(g(t))))} \vee X_{R(f(t))} \big) \wedge \neg X_{R(f(f(t)))}.$$

Wir zählen die Grundterme in $\mathrm{GT}_{\hat{\sigma}}$ in der folgenden Reihenfolge auf

$$t_1 = c, \quad t_2 = f(c), \quad t_3 = g(c), \quad t_4 = f(f(c)), \quad t_5 = g(f(c)), \quad \ldots$$

und zählen die Formeln in $\mathrm{AHE}(\chi)$ in derselben Reihenfolge auf, also

$$\xi_1 = \xi_{t_1}, \quad \xi_2 = \xi_{t_2}, \quad \xi_3 = \xi_{t_3}, \quad \ldots$$

Bei dem auf Folie 373 beschriebenen Verfahren wird dann beispielsweise im Schleifendurchlauf für $i = 5$ getestet, ob die aussagenlogische Formel

$$\big(\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 \wedge \xi_5 \big)$$

unerfüllbar ist. Dazu können wir beispielsweise das Resolutionsverfahren oder den DPLL-Algorithmus anwenden.

In unserem Beispiel entspricht die Formel $(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_5)$ der Klauselmenge

$$\begin{aligned}\Gamma := \Big\{ & \{ X_{R(c)} \}, \\ & \{ \neg X_{R(c)}, X_{R(f(f(g(c))))}, X_{R(f(c))} \}, \ \{ \neg X_{R(f(f(c)))} \}, \\ & \{ \neg X_{R(f(c))}, X_{R(f(f(g(f(c)))))}, X_{R(f(f(c)))} \}, \ \{ \neg X_{R(f(f(f(c))))} \}, \\ & \{ \neg X_{R(g(c))}, X_{R(f(f(g(g(c)))))}, X_{R(f(g(c)))} \}, \ \{ \neg X_{R(f(f(g(c))))} \} \\ & \{ \neg X_{R(f(f(c)))}, X_{R(f(f(g(f(f(c))))))}, X_{R(f(f(f(c))))} \}, \ \{ \neg X_{R(f(f(f(f(c)))))} \} \\ & \{ \neg X_{R(g(f(c)))}, X_{R(f(f(g(g(f(c))))))}, X_{R(f(g(f(c))))} \}, \ \{ \neg X_{R(f(f(g(f(c)))))} \} \Big\}\end{aligned}$$

Wir konstruieren eine Resolutionswiderlegung für Γ:

(1)	$\{ X_{R(c)} \}$	in Γ
(2)	$\{ \neg X_{R(c)}, X_{R(f(f(g(c))))}, X_{R(f(c))} \}$	in Γ
(3)	$\{ X_{R(f(f(g(c))))}, X_{R(f(c))} \}$	Resolvente aus 1,2
(4)	$\{ \neg X_{R(f(f(g(c))))} \}$	in Γ
(5)	$\{ X_{R(f(c))} \}$	Resolvente aus 3,4
(6)	$\{ \neg X_{R(f(c))}, X_{R(f(f(g(f(c)))))}, X_{R(f(f(c)))} \}$	in Γ
(7)	$\{ X_{R(f(f(g(f(c)))))}, X_{R(f(f(c)))} \}$	Resolvente aus 5,6
(8)	$\{ \neg X_{R(f(f(c)))} \}$	in Γ
(9)	$\{ X_{R(f(f(g(f(c)))))} \}$	Resolvente aus 7,8
(10)	$\{ \neg X_{R(f(f(g(f(c)))))} \}$	in Γ
(11)	$\emptyset$	Resolvente aus 9,10

Somit ist Γ unerfüllbar (gemäß Satz 2.60). Das auf Folie 373 angegebene Verfahren hält daher (spätestens) im Schleifendurchlauf für $i = 5$ mit der Ausgabe „χ ist unerfüllbar“ an. Da χ erfüllbarkeitsäquivalent zur Formel $(\varphi \wedge \neg\psi)$ ist, wissen wir also, dass $\varphi \models \psi$ gilt.
Dies beendet Beispiel 4.53.