Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

30. November 2017

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

# Übungsblatt 7

**Abgabe:** *bis 12. Dezember 2017, 11.*$^{10}$ *Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

**Aufgabe 1:** **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, c, R\}$ eine Signatur, die aus einem 2-stelligen Funktionssymbol $f$, einem Konstantensymbol $c$ und einem 1-stelligen Relationssymbol $R$ besteht.

**(a)** Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen $\sigma$-Term, um eine atomare $\sigma$-Formel bzw. um eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel (gemäß der Definitionen aus dem Skript) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort keinen $\sigma$-Term, keine atomare $\sigma$-Formel bzw. keine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel darstellt.

**(i)** $f(c, f(c, c))$

**(ii)** $R(v_1, v_2)$

**(iii)** $\big(\forall v_1 f(v_1, f(v_1, v_1)) \land R(f(c, v_2))\big)$

**(iv)** $\forall v_4 \exists v_5 \forall v_7 \Big(\big(R(f(v_{42}, f(v_1, c))) \land R(v_6)\big) \to f(v_3, v_2) = c\Big)$

Der örtliche *Toobi-Baumarkt* hat einen neuen Automaten entwickelt, um der Kundschaft Farben zu empfehlen und über den Vorrat der Farben im Baumarkt zu informieren. Dazu geben die Kunden zwei Farben aus einer Auswahl von sechs Farben in den Automaten ein und erhalten eine der sechs Farben als Ergebnis. Die sechs Farben ergeben das Universum $A := \{$Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange, Rot$\}$.

Wir betrachten die $\sigma$-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}})$ mit $c^{\mathcal{A}} :=$ Violett und $R^{\mathcal{A}} = \{$Blau$\}$; die Funktion $f^{\mathcal{A}}$ soll die Funktionsweise des Farbempfehlungsautomaten beschreiben: Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile $x$ und Spalte $y$ der folgenden Tabelle.

| $f^{\mathcal{A}}$ | Violett | Blau | Grün | Gelb | Orange | Rot |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Violett | Gelb | Rot | Orange | Violett | Grün | Blau |
| Blau | Rot | Orange | Gelb | Grün | Violett | Violett |
| Grün | Orange | Gelb | Rot | Blau | Violett | Violett |
| Gelb | Violett | Grün | Blau | Violett | Rot | Orange |
| Orange | Grün | Violett | Violett | Rot | Blau | Gelb |
| Rot | Blau | Violett | Violett | Orange | Gelb | Grün |

Dabei beschreibt $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ die Farbempfehlung bei Eingabe der Farben $x$ und $y$, und die Relation $R^{\mathcal{A}}$ beschreibt die vorrätigen Farben.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die $\sigma$-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Rot}, \quad \beta(v_1) = \text{Gelb}, \quad \beta(v_2) = \text{Blau}, \quad \text{und} \quad \beta(v_i) = \text{Orange} \quad \text{für alle } i \geq 3.$$

**(b)** Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ und $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden $\sigma$-Terme, die Eingaben der Toobi-Kundschaft repräsentieren:

**(i)** $t_1 := f(v_{73}, c)$ **(ii)** $t_2 := f(f(v_{42}, v_0), f(v_1, c))$ **(iii)** $t_3 := f(f(f(v_2, v_5), f(v_3, c)), v_9)$

Geben Sie bei der Berechnung von $[\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}$ mit $i \in [3]$ mindestens $i + 1$ Zwischenschritte an.

**Aufgabe 2:** **(25 Punkte)**

Im Onlinerollenspiel *Village of Voidcraft* kann sich jeder Spieler einer Plündergilde anschließen; in der Rangliste der 100 besten Spieler wird dann zu jedem Spieler auch die entsprechende Gilde angezeigt. Für diese Aufgabe konzentrieren wir uns auf die drei Gilden *Punktegeier*, *Kistenklopper* und *RaidenStattStudieren*.

Sei $\sigma = \{P, K, R, \mathit{Vorg}, \mathit{erster}\}$ eine Signatur, wobei $P, K, R$ 1-stellige Relationssymbole sind, $\mathit{Vorg}$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $\mathit{erster}$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und $\mathit{erster}^{\mathcal{A}} = 1$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in P^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz $a$ der Rangliste ist in der Gilde Punktegeier
- $a \in K^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz $a$ der Rangliste ist in der Gilde Kistenklopper
- $a \in R^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz $a$ der Rangliste ist in der Gilde RaidenStattStudieren
- $\mathit{Vorg}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 1 \\ a-1, & \text{falls } a \in \{2, \ldots, 100\}. \end{cases}$

**(a)** Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

**(i)** $\exists x \exists y \exists z \Big( \big( K(y) \land P(x) \big) \land R(z) \Big)$

**(ii)** $\exists x \big( P(x) \land \neg \exists y \; x = \mathit{Vorg}(y) \big)$

**(iii)** $\forall x \big( (R(x) \land \neg \; \mathit{erster} = x) \to K(\mathit{Vorg}(x)) \big)$

**(b)** Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

**(i)** Auf Platz 1 der Rangliste ist ein Mitglied der Punktegeier.

**(ii)** Falls ein Spieler von Kistenklopper auf Platz 1 der Rangliste ist, dann stehen auf allen Plätzen Spieler von Kistenklopper.

**(iii)** Auf der Rangliste stehen mindestens zwei Mitglieder von RaidenStattStudieren.

**(iv)** Unmittelbar hinter jedem Mitglied von Kistenklopper steht eines von Punktegeier oder RaidenStattStudieren.

**Aufgabe 3:** **(25 Punkte)**

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über dem Alphabet $\Sigma$.

**(a)** Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := abaabb$ über dem Alphabet $\Sigma$ an.

**(b)** Sei $\mathcal{A}_w$ die $\sigma_\Sigma$-Struktur mit $A := [5]$, in der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[5]$ ist und $P_a^{\mathcal{A}_w} := \{1, 3, 5\}$ und $P_b^{\mathcal{A}_w} := \{2, 4\}$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{A}_w$ repräsentiert?

**(c)** **Definition:** Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz $\varphi$ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.
Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz $\psi$?

$$\psi \;:=\; \forall x \Bigg( P_a(x) \;\to\; \exists y \Bigg( P_b(y) \;\land\; x \leqslant y \;\land\; \forall z \Big( (x \leqslant z \;\land\; z \leqslant y) \to (z = x \lor z = y) \Big) \Bigg) \Bigg)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangssprachlich angeben.

**(d)** Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(ab)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie, warum Ihr $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz das Gewünschte leistet.

**Aufgabe 4:** **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.
Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

***Achtung:*** *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

**(a)** Auf der Website zur Prolog-Übung finden Sie die Datei `al.pl`. Speichern Sie die Datei in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `al/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt7.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([al]).
```

beginnt.

*Anmerkung:* Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `al.pl`, so dass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

**(b)** Schreiben Sie (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `as_in_al/2`, so dass das Ziel `as_in_al(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn `F` eine aussagenlogische Formel repräsentiert und `X` ein Aussagensymbol, das in `F` vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_al(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten `X = c; X = a; X = b; false.` führen.

**(c)** Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.38 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `al2nnf/3` zu schreiben, so dass die Anfrage

```
?- al2nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- `F` repräsentiert eine aussagenlogische Formel $\varphi$,
- `P` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\varphi$ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- `N` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\neg\varphi$ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

*Hinweis:* Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.38 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form $(\psi_1 \to \psi_2)$.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- al2nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c/\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

*Hinweise:* Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.