Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

23. November 2017

Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 5. Dezember 2017, 11.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi \;:=\; (U \to \mathbf{0}) \,\wedge\, (\mathbf{0} \to R) \,\wedge\, (\mathbf{1} \to (Q \vee \neg W)) \,\wedge\, S \,\wedge\, ((S \wedge \neg U \wedge R) \to \neg V) \,\wedge\, (S \vee \neg R)$$

(b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma \;:=\; \Big\{ \{P\},\ \{R\},\ \{T\},\ \{\neg P, \neg Y\},\ \{\neg P, \neg R, S\},\ \{\neg S, \neg X, Y\},\ \{\neg P, \neg T, X\},\ \{S, \neg Y\} \Big\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklausel mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

(c) **(i)** Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.

(ii) Gibt es eine Formel in AL, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist?

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(d) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge Γ_3 aus Aufgabe 1**(b)** von Blatt 5 bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,c)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d\}$. Welche Paare $(x,y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils

(i) reflexiv ist?
(ii) symmetrisch ist?
(iii) antisymmetrisch ist?
(iv) konnex ist?
(v) transitiv ist?

Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i für $i \in \{1,2\}$.

(i) $M_1 := \{\bigcirc, \leftmoon, \newmoon, \rightmoon\}$, $\quad R_1 := \{(\bigcirc, \leftmoon), (\bigcirc, \newmoon), (\bigcirc, \rightmoon), (\leftmoon, \newmoon), (\leftmoon, \rightmoon), (\newmoon, \rightmoon)\}$

(ii) $M_2 := \mathbb{N}$, $\quad R_2 := \{(a,b) \in M_2 \times M_2 \,:\, a+b \text{ ist eine gerade Zahl}\}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{1,2\}$ für jede der Eigenschaften *reflexiv*, *symmetrisch*, *antisymmetrisch*, *konnex*, *transitiv* jeweils explizit an, ob die Relation R_i diese Eigenschaft besitzt. Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c.

Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(q,q), (r,t), (t,r), (u,q)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(q,s,q), (u,t,r)\}$, $c^{\mathcal{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(5,5), (4,1), (2,5), (1,4)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(2,1,4), (5,3,5)\}$, $c^{\mathcal{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(w,y), (v,v), (y,w), (z,v)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(v,z,v), (z,y,w)\}$, $c^{\mathcal{C}} := x$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}}: A \to A$, $f^{\mathcal{B}}: B \to B$ und $f^{\mathcal{C}}: C \to C$ definiert sind durch

$a \in A$	q	r	s	t	u
$f^{\mathcal{A}}(a)$	t	s	t	u	q

$a \in B$	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{B}}(a)$	2	5	1	3	1

$a \in C$	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{C}}(a)$	y	x	y	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Die Bearbeitung der Aufgabenteile b) und c) ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- append([c, d], [e, a], X).
```

(b) *Binärbäume* seien definiert, wie in der dritten Prolog-übungsstunde (vgl. Folie zu Programm `03-02.pl` auf der Website zur Prolog-Übung). Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass die Anfrage `?- label(B, X).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` die Beschriftung eines Blattes von `B` ist.

So soll beispielsweise die Anfrage

```
?- label(tree( leaf(b) , tree(leaf(a) , tree( leaf(c), leaf(d))) ),X).
```

die Antworten

```
X = b;    X = a;    X = c;    X = d.
```

liefern.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass die Anfrage `?- labels(B, Y).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und eine Liste `Y` von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn `Y` eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter von `B` ist, und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

So soll beispielsweise die Anfrage

```
?- labels(tree( leaf(b) , tree(leaf(leaf(a)) , leaf(c))),X).
```

die Antwort

```
X = [b, leaf(a), c].
```

liefern.

Hinweis: Benutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `append/3`.