Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

16. November 2017

Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 28. November 2017, 11.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Stellen Sie für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 \;:=\; \{\{P, \neg S\}, \{S\}, \{S, R\}, \{\neg S, \neg P\}\}$$

eine aussagenlogische Formel φ_1 in KNF auf, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \quad \iff \quad \mathcal{I} \models \Gamma_1 \,.$$

(b) Sei Γ_1 die Klauselmenge aus Aufgabenteil **(a)** und sei

$$\Gamma_2 \;:= \{\{P, Q, \neg R\}, \{\neg T\}, \{P, Q, \neg S\}, \{\neg Q, P, \neg R\}, \{\neg S, \neg Q, \neg P, R\}, \{S, \neg S\}, \{Q, \neg S, R\}\}$$
$$\Gamma_3 \;:= \{\{\neg P, Q, R, S\}, \{P, R, \neg S\}, \{\neg P, \neg Q\}, \{\neg R, S\}, \{P\}, \{\neg P, \neg S\}\}\ ,$$

wobei P, Q, R, S, T unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind. Geben Sie für jede der drei Klauselmengen jeweils ein Modell oder eine Resolutionswiderlegung an. Bei einer Resolutionswiderlegung gehen Sie analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Seien P, Q, R, S, T, U unterschiedliche Aussagensymbole aus AS. Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht.

$$\Gamma \;:=\; \Big\{\{\neg P, R, S\}, \{\neg Q, U, S\}, \{\neg Q, \neg U, \neg R\}, \{\neg S, \neg Q\}, \{Q, \neg R, \neg P\}, \{P\} \\ \{Q, U, R\}, \{Q, \neg U, \neg S\}, \{P, T\}, \{P, U\}, \{\neg U, R, \neg T\}, \{P, \neg R, \neg T\}\Big\}$$

Hinweis: Wählen Sie in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus positive Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge. Ebenso wählen Sie bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge. Lösungen, die sich nicht an diese Regel halten, werden nicht korrigiert.

Geben Sie analog wie in Beispiel 2.64 die entstehende Klauselmenge und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

(a) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.

(b) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil **(a)**, d.h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ: $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(`i`)` das Literal A_i und `neg(`i`)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.

Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass `L1`, `L2` und `R` Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` erfüllt wenn `R` eine Resolvente von `L1` und `L2` ist. Beispielsweise sollte die Anfrage

`?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R).`

zu folgenden Ausgaben führen:

`R = [pos(1),pos(4),pos(2),neg(4)]` und `R = [pos(1),neg(3),pos(2),pos(3)]`

Hinweise: Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Blatt 4 Teilaufgabe **4(c)**; haben Sie diese Aufgabe nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.

(b) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben `F`, `A`, `K`, `E`, `C`, `S`, `T`, `O`, `R`, `Y` die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben `C`, `A`, `K`, `E` die Ziffern 8, 7, 1, 4 zu, so entpricht `CAKE` der Dezimalzahl 8714.

		F	A	K	E
+		C	A	K	E
=	S	T	O	R	Y

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \ldots, 9\}$ zu den Buchstaben `F`, `A`, `K`, `E`, `C`, `S`, `T`, `O`, `R`, `Y` ist eine Lösung für das Rätsel, wenn

- die Gleichung `FAKE` + `CAKE` = `STORY` erfüllt ist.
- es keine zwei Buchstaben aus {`F`, `A`, `K`, `E`, `C`, `S`, `T`, `O`, `R`, `Y`} gibt, denen die gleiche Ziffer zugeordnet ist
- die Zahlen aus der Gleichung keine führenden Nullen besitzen (d.h.: weder `F` noch `C` noch `S` darf die Ziffer 0 zugeordnet werden).

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/10`, so dass

`raetsel(F, A, K, E, C, S, T, O, R, Y)`

alle Lösungen für das Rätsel ausgibt.

Fügen Sie Ihrer Datei abschließend einen Fakt `anzahl/1` hinzu, der besagt, wieviele Lösungen Sie gefunden haben.

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \ldots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.