

Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 4

Abgabe: bis 21. November 2017, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Lesen Sie Satz 2.46 aus der Vorlesung.

- (a) Bestimmen Sie alle Interpretationen, die φ_n erfüllen und bei denen die Interpretation nur eines Aussagensymbols abgeändert werden muss, damit φ_n nicht mehr erfüllt wird. Begründen Sie Ihre Wahl.
- (b) Beweisen Sie Satz 2.46.
Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \dots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ mindestens zwei essentiell verschiedene Interpretationen aus (a) erfüllt. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.
- (c) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir einen Baum \mathcal{B} mit der abzählbar unendlichen Knotenmenge $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von \mathcal{B} ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von \mathcal{B} repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge *Kinder*(v) all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass \mathcal{B} endlich verzweigend ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge *Kinder*(v) endlich ist.

- (a) Ein Pfad in \mathcal{B} ist eine (endliche oder unendliche) Folge (v_0, v_1, v_2, \dots) von Knoten aus V , so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von \mathcal{B} , und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \text{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ repräsentiert einen Pfad $P = (v_0, v_1, v_2, \dots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \text{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \iff v \in \{v_0, v_1, v_2, \dots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage „Der Knoten v gehört zum Pfad P “.

Geben Sie eine unendliche Formelmengemenge Φ an, so dass für jede Interpretation \mathcal{I} gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

- (b) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ hat die Länge n . Wir sagen dass der Baum \mathcal{B} *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn \mathcal{B} für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält. Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes König (1936):
Königs Lemma. *Wenn \mathcal{B} Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält \mathcal{B} einen Pfad unendlicher Länge.*

Aufgabe 3:

(25 Punkte)

Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 die Formel

$$\varphi := \left(\neg(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge R) \right)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung: Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.54. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln ψ (beginnend mit ψ_1) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von φ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in φ wie in Beispiel 2.54 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \dots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ' .

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: Die Bearbeitung der Teilaufgabe (c) ist unter Beachtung der bekannten Abgabeweise über Moodle abzugeben!

(a) Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

(i) $?- [a, X, a] = [Y, b, Y].$

(iii) $?- [_ , [] \mid [a, Y]] = [a, _ , Z, b].$

(ii) $?- [a, X \mid []] = [a, c].$

(iv) $?- [b, c \mid [d \mid [e]]] = [H \mid T].$

(b) Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs “Learn Prolog Now!” definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage $?- \text{member}(2, [2, a, X]).!$

(c) Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn E ein Element der Liste X ist und Y aus der Liste X durch Löschung eines Vorkommens von E entsteht.