Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

2. November 2017

Logik in der Informatik

Wintersemester 2017/2018

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 14. November 2017, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) A_{23} **(ii)** $((\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \wedge \neg A_1)$

(iii) $\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg \mathbf{0} \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg \mathbf{1}) \wedge \neg A_4)))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

$$\text{Wenn } \widetilde{\varphi} \text{ nicht allgemeingültig ist, dann ist } \varphi \text{ erfüllbar.}$$

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\rightarrow}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$[\![(X \tilde{\rightarrow} Y)]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![(X \rightarrow Y)]\!]^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **(30 Punkte)**

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder KNF und/oder NNF ist. Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

(i) $((A_{73} \vee \neg A_{42}) \vee A_{1337})$ **(iii)** $\big((A_0 \wedge \neg A_8) \vee (A_1 \vee A_5)\big)$

(ii) $\Big(\big((\neg A_9 \vee A_1) \wedge \mathbf{0}\big) \vee \neg A_8\Big)$ **(iv)** $\Big(\bigwedge_{i=2}^{4} \Big(\bigwedge_{j=5}^{73} \Big(\bigvee_{k=1}^{42} A_{i+j+k} \Big)\Big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die Formel

$$\varphi \;:=\; \Big(\big(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_2\big) \wedge \neg A_4\Big).$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.40 und 2.44 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.

- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe), welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**. Achten Sie darauf, dass in Satz 2.25 häufig die äußeren Klammern fehlen.
- Die Umformung ist mit maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

(c) Finden Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\neg, \rightarrow\}$ und $\tau_2 := \{\vee, \wedge, \mathbf{0}\}$ heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.34). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3: (20 Punkte)

Betrachten Sie die Einschränkung des aussagenlogischen Erfüllbarkeitsproblems auf Formeln in DNF, d.h.: Die Eingabe besteht aus einer aussagenlogischen Formel φ in DNF, und die Aufgabe ist, zu entscheiden ob φ erfüllbar ist.

Finden Sie heraus, ob dieses Problem effizient gelöst werden kann. Falls „ja", geben Sie einen Polynomialzeit-Algorithmus zur Lösung des Problems an; falls „nein", weisen Sie nach, dass das Problem NP-hart ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch „Learn Prolog Now!"

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben. Beachten Sie dazu die Abgabehinweise unter
`https://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS17-18/Logik/prolog-uebung.shtml`

Läufe aus Vorwärts- und Rückwärtsbewegungen seien induktiv, wie folgt defniert:
Basisregel:

(B) Das Atom `start` ist ein Lauf.

Rekursive Regeln:

(RV) Ist der Term `t` ein Lauf, so ist auch der Term `vorwaerts(t)` ein Lauf.

(RZ) Ist der Term `t` ein Lauf, so ist auch der Term `zurueck(t)` ein Lauf.

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `lauf(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist.

(b) Schreiben Sie ein Prädikat `laufDerDinge(X)`, das genau dann gilt, wenn `X` ein Lauf ist, in dem nach jedem `vorwaerts`-Schritt mindestens zwei `zurueck`-Schritte ausgeführt werden. Beispielsweise soll der Term `zurueck(zurueck(vorwaerts(start)))` das Prädikat erfüllen, `vorwaerts(zurueck(zurueck(start)))` jedoch nicht.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `endeGutAllesGut/1`, welches genau dann gilt, wenn das Argument ein Lauf ist, der *mehr* `vorwaerts`- als `zurueck`-Schritte enthält.

Vorgehen: Definieren Sie hierfür ein Hilfsprädikat `endeGutAllesGut(X,Y,Z)`, das genau dann für einen Lauf `X` gilt, falls `Y` als Unärzahl[1] der Anzahl der `vorwaerts`-Schritte entspricht und `Z` unär der Anzahl der `zurueck`-Schritte des Laufes `X`. Nutzen Sie weiterhin ein selbstdefiniertes Prädikat `greater/2` um die zwei Unärzahlen zu vergleichen.

[1] Analog zum Buch mittels `0` und `succ`.