Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

1. Dezember 2016

Logik in der Informatik

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 7

Abgabe: *13. Dezember 2016*

Aufgabe 1: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma = \{M, B, F, \mathit{Nachfolger}, \mathit{letzter}\}$ eine Signatur, wobei M, B, F 1-stellige Relationssymbole, *Nachfolger* ein 1-stelliges Funktionssymbol und *letzter* ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 34\}$ und $\mathit{letzter}^{\mathcal{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in M^{\mathcal{A}} \iff$ 1. FSV Mainz 05 ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in B^{\mathcal{A}} \iff$ Hertha BSC ist Tabellenführer an Spieltag a
- $a \in F^{\mathcal{A}} \iff$ Eintracht Frankfurt ist Tabellenführer an Spieltag a
- $\mathit{Nachfolger}^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \ldots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Jede der drei genannten Mannschaften ist mindestens einmal Tabellenführer.

(ii) Hertha BSC holt den Titel, wenn sie bereits am vorletzten Spieltag Tabellenführer sind.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\neg\exists x\Big(\neg\big((M(x) \vee B(x)) \vee F(x) \big)\Big)$

(ii) $\forall x\Big(\big((\neg\, \mathit{Nachfolger}(x){=}\mathit{letzter} \wedge F(x)) \wedge F(\mathit{Nachfolger}(x))\big) \rightarrow \neg F\big(\mathit{Nachfolger}(\mathit{Nachfolger}(x))\big)\Big)$

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 2: **(27 Punkte)**

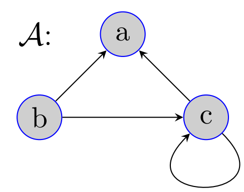
Seien $\sigma := \{E, g, c\}$ und $\sigma' := \{E\}$ Signaturen. Hierbei ist E ein 2-stelliges Relationssymbol, g ein 1-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol.

(a) Betrachten Sie jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ, bestimmen Sie jeweils die freien und die gebundenen Vorkommen von Variablen in φ, geben Sie die Menge $\text{frei}(\varphi)$ an und entscheiden Sie, ob φ ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ist. Begründungen müssen Sie hierbei nicht angeben.

(i) $\big(\forall x\ g(x){=}c\ \vee\ \forall y \exists z\ E(y,z)\big)$

(ii) $\exists y\Big(E(z,y)\ \wedge\ \forall y \exists z\big(E(g(y),g(z))\ \vee\ E(x,x)\big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die σ'-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$, die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird. Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma']$-Satz φ an, der die Struktur eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ'-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten:



$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

Erläutern Sie Ihren $\mathsf{FO}[\sigma']$-Satz φ.

(c) Geben Sie für die $\mathsf{FO}[\sigma']$-Formel

$$\varphi(x) \ :=\ \forall y\, \exists z\, \Big(x{=}y\ \vee\ \big(E(y,x)\ \rightarrow\ E(x,z)\big)\Big)$$

eine σ'-Struktur $\mathcal{A}$, deren Universum aus höchstens 4 Elementen besteht, und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ gilt. (Begründen Sie jeweils, warum $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \not\models \varphi$ gilt!)

Aufgabe 3: **(28 Punkte)**

Sei $\Sigma := \{\mathtt{A}, \mathtt{N}, \mathtt{S}\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_{\mathtt{A}}, P_{\mathtt{N}}, P_{\mathtt{S}}\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über dem Alphabet Σ.

(a) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := \mathtt{NASA}$ über dem Alphabet Σ an.

(b) Sei $\mathcal{A}$ die σ_Σ-Struktur mit $A := [6]$, in der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[6]$ ist und $P_{\mathtt{A}}^{\mathcal{A}} := \{1,3,5\}$, $P_{\mathtt{N}}^{\mathcal{A}} := \{2,4\}$ und $P_{\mathtt{S}}^{\mathcal{A}} := \{6\}$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{A}$ repräsentiert?

(c) **Definition:** Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.
Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \ :=\ \forall x\Big(P_{\mathtt{S}}(x)\ \rightarrow\ \exists y\big(P_{\mathtt{A}}(y)\ \wedge\ y \leqslant x\ \wedge\ \forall z(z \leqslant y\ \vee\ x \leqslant z)\big)\Big)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangangssprachlich angeben.

(d) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(\mathtt{N\,S\,A}^*)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie warum Ihr $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz das Gewünschte leistet.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.
Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

Achtung: *Geben Sie die von Ihnen erstellte Datei* `blatt07.pl` *über Moodle ab!*
Außerdem gilt: *Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, werden nicht bewertet!*

(a) Speichern Sie die Datei `al.pl`, die Sie unter `http://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS16-17/Logik/downloads/al.pl` finden können, in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `al/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt07.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([al]).
```

beginnt.

Anmerkung: Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `al.pl`, so dass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

(b) Schreiben Sie (in der Datei `blatt07.pl`) ein Prädikat `as_in_al/2`, so dass das Ziel `as_in_al(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn `F` eine aussagenlogische Formel repräsentiert und `X` ein aussagenlogisches Symbol, das in `F` vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_al(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten `X = c; X = a; X = b; false.` führen.

(c) Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.38 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt07.pl`) ein Prädikat `al2nnf/3` zu schreiben, so dass die Anfrage

```
?- al2nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- `F` repräsentiert eine aussagenlogische Formel φ,
- `P` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu φ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- `N` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\neg\varphi$ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

Hinweis: Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.38 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form $(\psi_1 \to \psi_2)$.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- al2nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c/\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

Hinweise: Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.