Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. November 2016

Logik in der Informatik

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 6

Abgabe: *6. Dezember 2016*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,d),(d,a),(d,b),(e,e)\}$ über der Menge $A := \{a,b,c,d,e\}$. Ist es möglich, durch Hinzufügen von Paaren $(x,y) \in A \times A$ die Relation R so zu erweitern, dass für die Erweiterungen R_r, R_a, und R_k gilt:

(i) R_r ist reflexiv, **(ii)** R_a ist antisymmetrisch, **(iii)** R_k ist konnex.

Geben Sie jeweils, falls existent, eine möglichst kleine Erweiterung von R an.

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i.

(i) $M_1 := \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$, $R_1 := \{(x,y) \in M_1 \times M_1 \,:\, x \cdot y \leq 3\}$,

(ii) $M_2 := \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\geq 1})$, $R_2 := \{(a,b) \in M_2 \times M_2 \,:\, a \cap b = \emptyset\}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{1,2\}$ an, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex, transitiv) die Relation R_i jeweils besitzt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, c\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei

$$A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$$

und $c^{\mathcal{A}} :=$ Spock.
Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x,y)$ für $x,y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der nebenstehenden Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Stein},\ \beta(v_1) = \text{Spock},\ \beta(v_2) = \text{Schere}\ \text{und}\ \beta(v_i) = \text{Papier}\ \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(a) $t_1 := f(v_1, f(v_0, v_2))$

(b) $t_2 := f(f(f(v_0, v_0), c), f(v_3, f(v_4, v_5)))$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term, um eine atomare σ-Formel und/oder um eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel (gemäß der Definitionen aus dem Skript) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort keinen σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel darstellt.

(i) $(v_1 \vee v_2)$

(ii) $R\big(f(v_2), c\big)$

(iii) $\big(f(v_9) \vee R(v_9, v_9)\big)$

(iv) $\forall v_2 \exists v_3 \forall v_2 \Big(f(v_1) = c \leftrightarrow \forall v_2 \big(S(f(v_1), v_4, v_5) \wedge R(v_1, v_6)\big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(3, 3), (5, 4), (1, 1)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(2, 2, 4), (5, 3, 1)\}$, $c^{\mathcal{A}} := 2$
- $B := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(v, v), (z, y), (x, x)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(w, w, y), (z, x, v)\}$, $c^{\mathcal{B}} := w$
- $C := \{a, b, c, d, e\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(e, e), (c, c), (a, b)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(a, c, e), (d, d, b)\}$, $c^{\mathcal{C}} := d$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}}\colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}}\colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}}\colon C \to C$ definiert sind durch

x	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	2	5	4

x	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{B}}(x)$	w	v	z	x	y

x	a	b	c	d	e
$f^{\mathcal{C}}(x)$	b	a	d	e	d

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Die Bearbeitung der Teilaufgaben* **(b)**, **(c)** *und* **(d)** *ist in einer Datei mit dem Namen* `blatt06.pl` *digital über Moodle abzugeben!*

Außerdem gilt: *Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, werden nicht bewertet!*

(a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

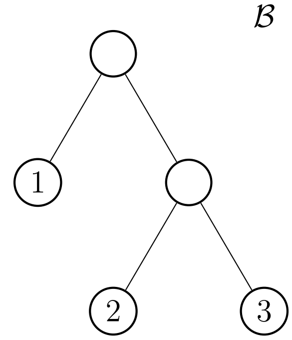
```
?- append(X, Y, [a, b]).
```

(b) In dieser und den folgenden Teilaufgaben betrachten wir *Binärbäume*, deren *Blätter beschriftet* sind und deren innere Knoten immer *genau ein linkes und ein rechtes Kind* besitzen.

Wir repräsentieren solche Binärbäume wie folgt durch Prolog-Terme: Für einen beliebigen Prolog-Term `X` repräsentiert `leaf(X)` ein Blatt mit Beschriftung `X`. Sind `L` und `R` Repräsentationen von Binärbäumen, dann repräsentiert `node(L, R)` einen inneren Knoten, dessen Kinder die Wurzeln der durch `L` und `R` repräsentierten Binärbäume sind.

Beispielsweise wird der rechts abgebildete Binärbaum $\mathcal{B}$ repräsentiert durch den folgenden Prolog-Term:

$\mathcal{B}$




```
node(leaf(1), node(leaf(2), leaf(3)))
```

Schreiben Sie ein Prädikat `tree/1`, so dass das Ziel `tree(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` einen Binärbaum repräsentiert.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass das Ziel `label(B, X)` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` die Beschriftung eines Blattes von `B` ist.

Repräsentiert `B` den in der obigen Zeichnung dargestellten Binärbaum $\mathcal{B}$, so soll beispielsweise die Anfrage

```
?- label(B, X).
```

die folgenden Antworten liefern:

```
X = 1;
X = 2;
X = 3.
```

(d) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass das Ziel `labels(B, Y)` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und eine Liste `Y` von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn `Y` eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter von `B` ist; und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

Repräsentiert `B` den in der obigen Zeichnung dargestellten Binärbaum $\mathcal{B}$, so soll beispielsweise die Anfrage

```
?- labels(B, Y).
```

die folgende Antwort liefern:

```
Y = [1, 2, 3].
```

Hinweis: Benutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `append/3`.