Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. November 2016

Logik in der Informatik

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 5

Abgabe: *29. November 2016*

Aufgabe 1: (27 Punkte)

(a) Geben Sie eine Resolutionswiderlegung für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 \; := \{ \; \{\neg R, S\}, \; \{\neg S, T\}, \; \{R, \neg T\}, \; \{R, S, T\}, \; \{\neg R, \neg S, \neg T\} \; \}$$

an, wobei R, S, T unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind. Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

(b) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.

(c) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil **(b)**, d.h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ: $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Seien Q, R, S, T, U, W unterschiedliche Aussagensymbole aus AS. Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht.

$$\Gamma \; := \Big\{ \; \{R, \neg S, T\}, \{U, W\}, \{\neg Q, \neg R, S\}, \{\neg T, U\}, \{R, \neg U, \neg W\}, \{Q, R, S, T\}, \\ \{Q, \neg T\}, \{\neg Q, \neg R, T\}, \{\neg R, \neg S, \neg T, \neg U\}, \{\neg U, W\}, \{U, \neg W\}, \{Q\} \; \Big\}$$

Hinweis: Um Ihnen selbst und unseren Tutor_innen die Arbeit zu erleichtern, wählen Sie bitte in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus nicht-negierte Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge. Ebenso wählen Sie bitte bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge.

Geben Sie wie in Beispiel 2.64 entsprechend die entstehende Klauselmenge und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.

Aufgabe 3: **(28 Punkte)**

(a) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi \;:=\; R \wedge (\mathbf{0} \to T) \wedge (\mathbf{1} \to (P \vee \neg Q)) \wedge (S \to \mathbf{0}) \wedge ((R \wedge \neg S \wedge T) \to \neg W) \wedge (R \vee \neg T)$$

(b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma \;:=\; \Big\{ \{U\},\ \{W\},\ \{V, \neg W\},\ \{S, \neg T\},\ \{U, \neg V, \neg W\},\\ \{\neg T, \neg V\},\ \{S, \neg U, \neg V\},\ \{\neg S, \neg T\} \Big\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklauseln mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

(c) **(i)** Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.

(ii) Gibt es eine Formel in AL, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist?

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(d) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge Γ_1 aus Aufgabe 1**(a)** bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben ist digital über Moodle abzugeben!*

Außerdem gilt: *Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, werden nicht bewertet!*

(a) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben `A`–`H` die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben `B`, `D` und `F` die Ziffern 3, 4 und 2 zu, so entpricht `DFB` der Dezimalzahl 423.

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathtt{AB} & + & \mathtt{C} & = & \mathtt{DE} \\
\times & & + & & + \\
\mathtt{AB} & - & \mathtt{C} & = & \mathtt{AD} \\
= & & = & & = \\
\mathtt{DFB} & : & \mathtt{G} & = & \mathtt{HD}
\end{array}
$$

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \dots, 9\}$ zu den Buchstaben `A`–`H` ist eine Lösung für das Rätsel, wenn alle Gleichungen (horizontal und vertikal) erfüllt sind. Natürlich kann es keine Lösung geben, welche dem Buchstaben `G` die Zahl 0 zuordnet.

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/8`, so dass die Anfrage

```
?- raetsel(A, B, C, D, E, F, G, H).
```

alle Lösungen des Zahlenrätsels als Substitutionen für die Variablen `A`–`H` ausgibt.

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \dots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.

(b) Schreiben Sie ein *end-rekursives (tail recursive)* Prädikat `psum/2`, so dass gilt: Ist `L` eine Liste von Zahlen $n_1, \dots, n_\ell$ der Länge $\ell \geq 0$, dann gibt die Anfrage

```
?- psum(L, P).
```

alle partiellen Summen der Zahlen in der Liste aus, d.h., für alle $k \leq \ell$ und alle Indizes $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \ell$ die Zahl $\sum_{i=1}^{k} n_{j_i}$.

Beispielsweise soll die Anfrage

```
?- psum([1, 2, 3], P).
```

die folgenden Antworten liefern:

```
P = 6 ;
P = 3 ;
P = 4 ;
P = 1 ;
P = 5 ;
P = 2 ;
P = 3 ;
P = 0.
```

Die Reihenfolge der Antworten ist unwichtig.

Hinweis: Führen Sie gegebenfalls ein Hilfsprädikat `psum/3` ein.