Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

10. November 2016

# Logik in der Informatik

Wintersemester 2016

# Übungsblatt 4

**Abgabe:** *22. November 2016*

**Aufgabe 1:** **(25 Punkte)**

**(a)** Stellen Sie für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 \ := \ \Big\{\{R, S\}, \{\neg R, S, T\}, \{\neg S, \neg T\}, \{R, \neg T\}, \{T, \neg S, \neg R, U\}, \{\neg S, \neg U\}\Big\} \ ,$$

wobei $R, S, T, U$ unterschiedliche Aussagensymbole aus $\mathsf{AS}$ sind, eine aussagenlogische Formel $\varphi_1$ in KNF auf, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \quad \iff \quad \mathcal{I} \models \Gamma_1 \ .$$

**(b)** Sei $\Gamma_1$ die Klauselmenge aus Aufgabenteil **(a)** und sei

$$\Gamma_2 \ := \Big\{\{Q, R, S\}, \{Q, \neg R\}, \{Q, R, \neg S\}, \{R, \neg Q\}, \{\neg R, \neg Q\}\Big\} \ ,$$
$$\Gamma_3 \ := \Big\{\{P, \neg R, S\}, \{\neg R, \neg Q\}, \{\neg P, S\}, \{R\}, \{\neg S, Q\}\Big\} \ ,$$

wobei $P, Q, R, S$ unterschiedliche Aussagensymbole aus $\mathsf{AS}$ sind. Geben Sie für jede der drei Klauselmengen jeweils ein Modell oder eine Resolutionswiderlegung an. Bei einer Resolutionswiderlegung gehen Sie analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

**Aufgabe 2:** **(25 Punkte)**

Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 die Formel

$$\varphi \;:=\; \Big(((P \vee \neg Q) \wedge S) \rightarrow \neg(Q \vee \neg S)\Big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel $\varphi_K$ in 3-KNF um.

**Achtung:**
Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.54. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

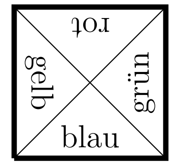
- Die Subformeln $\psi$ (beginnend mit $\psi_1$) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von $\varphi$ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in $\varphi$ wie in Beispiel 2.54 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in $\varphi'$ eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In $\varphi_K$ entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von $\varphi'$.

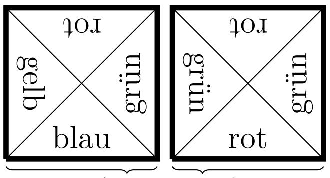
Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in $\varphi'$ können eventuell die entsprechenden Zeilen in $\varphi_K$ nicht korrigiert werden.

*— auf der nächsten Seite geht's weiter —*

**Aufgabe 3:** **(25 Punkte)**

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps $t$ besitzen die selbe Färbung ihrer Kanten. Sei $K$ eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien $H$ und $V$ zwei Relationen, die für zwei Kacheltypen $t_1, t_2$ besagen, dass $t_1$ und $t_2$ in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von der selben Farbe sind.




$(t_1 \;,\; t_2) \in H$

D.h. für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann wenn $t_2$ rechts neben $t_1$ passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann wenn $t_2$ über $t_1$ passt.

Eine $K$-Kachelung der $n \times n$-Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \ldots, n\}^2 \to K$, die $H$ und $V$ respektiert, d.h. für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Eine $K$-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \to K$, die $H$ und $V$ respektiert, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A^t_{i,j}$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld $(i,j)$ mit einer Kachel vom Typ $t$ gekachelt wird.

**(a)** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge $\Gamma_n$ von aussagenlogischen Formeln, so dass jede Interpretation $\mathcal{I}$, die $\Gamma_n$ erfüllt, einer $K$-Kachelung der $n \times n$-Ebene entspricht. Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge $\Gamma_n$.

**(b)** Zeigen Sie das folgende Theorem:

> Sei $K$ eine endliche Menge von Kacheltypen. Wenn es für jede $n \times n$-Ebene eine $K$-Kachelung gibt, dann gibt es auch eine $K$-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene.

***Hinweis:*** Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Aussagenlogik.

**Aufgabe 4:** **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

***Achtung:*** *Die Lösung der Teilaufgaben* **(c)** *und* **(d)** *ist über Moodle abzugeben. Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, werden nicht bewertet!*

**(a)** Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

   **(i)** `?- [a, X, a] = [Y, b, Y].`

   **(ii)** `?- [Y, c] = [c, Y | []].`

   **(iii)** `?- [_, [] | [a, Y]] = [a, _, Z, b].`

   **(iv)** `?- [a | [b | T]] = [X, H | [c | [d]]].`

**(b)** Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs "Learn Prolog Now!" definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

```
?- member(a, [b, X, a]).
```

**(c)** Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn `E` ein Element der Liste `X` ist und `Y` aus der Liste `X` durch Löschung eines Vorkommens von `E` entsteht.

So sollte beispielsweise die Anfrage

```
?- nimm(E, [1, 2, 3], Y).
```

zu der folgenden Antworten führen:

```
E = 1,
Y = [2, 3] ;
E = 2,
Y = [1, 3] ;
E = 3,
Y = [1, 2] ;
false.
```

**(d)** Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(`$i$`)` das Literal $A_i$ und `neg(`$i$`)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.

Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass `L1`, `L2` und `R` Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` erfüllt wenn `R` eine Resolvente von `L1` und `L2` ist. Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R).
```

zu folgenden Antworten führen:

```
R = [pos(1), pos(4), pos(2), neg(4)] ;
R = [pos(1), neg(3), pos(2), pos(3)] ;
false.
```

*Hinweise:* Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Teilaufgabe **(c)**. Haben Sie **(c)** nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.