Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. November 2016

Logik in der Informatik

Wintersemester 2016

Übungsblatt 3

Abgabe: *15. November 2016*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

1000 Jahre später: Mittlerweile hat die Strategie des Außerirdischen aus Aufgabe 1 von Blatt 2 aufgrund sehr hoher Erfolgsquoten bei seiner Spezies Berühmtheit erlangt. Daher plant das Volk des Außerirdischen, das sich mittlerweile auf der Erde etabliert hat, mit Hilfe der neuesten Erfindung von Prof. Wernstrom und eines Raumschiffs in ein Paralleluniversum einzudringen, um dort eine Halloween-Ausbeutungsaktion auf dem Planeten Infinita zu starten.

Auf Infinita gibt es, wie der Name schon vermuten lässt, unendlich viele Grundstücke. Genau genommen gibt es für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ jeweils ein Grundstück $\langle i, j \rangle$. Außerdem hat Infinita auch unendlich viele Bewohner. Genau wie in der Stadt des Außerirdischen aus Aufgabe 1 von Blatt 2 hat jedes Grundstück genau einen Bewohner, der den Kategorien ***A****ngsthase*, *nette* ***O****ma*, ***G****eizhals* oder ***K****atzenliebhaber* angehören kann. Entsprechend existieren nun auch unendlich viele Aussagensymbole.

(a) Stellen Sie unendliche Formelmengen Φ_1 und Φ_4 auf, welche die in Aufgabe 1**(a)**, **(d)** von Blatt 2 beschriebenen Bedingungen repräsentieren, allerdings für den Planeten Infinita. Wenn Sie die Formelmengen Φ_1 und Φ_4 auf Grundlage der von Ihnen erstellten Formeln φ_1 und φ_4 aus Aufgabe 1 von Blatt 2 bilden, dann geben Sie φ_1 und φ_4 bitte erneut an. Sollten Sie wissen oder befürchten, dass Ihre Formeln φ_1 und φ_4 fehlerhaft sind, dann verwenden Sie die Formeln φ_1 und φ_4, die wir am 8. November 2016 auf unserer Webseite zur Verfügung stellen werden.

(b) Selbstverständlich ist auch für eine gute Vorbereitung auf Infinita eine Telefonumfrage nötig. Dabei stellen die Außerirdischen fest, dass auf jedem drei mal drei großen Teilstück von Grundstücken mindestens ein Katzenliebhaber wohnt. Stellen Sie eine unendliche Formelmenge Φ_2 auf, die diese Bedingung repräsentiert.

(c) Außerdem stellen die Außerirdischen fest, dass Geizhälse kein Geld für Halloween-Dekoration ausgeben. Das finden die Angsthasen besonders toll, da es dort keine gruselige und angsteinflößende Halloween-Dekoration im Vorgarten gibt. Daher ist jeder Angsthase auf Infinita mit mindestens einem Geizhals benachbart. Stellen Sie eine unendliche Formelmenge Φ_3 auf, die diese Bedingung repräsentiert.

(d) Sei $\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3 \cup \Phi_4$. Nun gilt es zu überprüfen, ob die Bedingungen, die durch die Formelmenge Φ repräsentiert werden, auf Infinita tatsächlich erfüllt werden können. Zu diesem Zweck erzeugen die Außerirdischen mit Hilfe eines Banach-Tarski Dupla-Shrinkers unendlich viele Roboter. Jeder dieser Roboter soll für ein endliches Teilstück des Planeten Infinita überprüfen, ob die Bedingungen erfüllt werden können.

Beweisen Sie mit Hilfe des Endlichkeitssatzes der Aussagenlogik, dass es zur Überprüfung, ob alle Bedingungen erfüllt werden können ausreicht, die Bedingungen für jedes *endliche* Teilstück des Planeten zu kontrollieren.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder KNF und/oder NNF ist.

(i) $\neg A_{73}$

(ii) $\Big(\big((\neg A_0 \wedge A_1) \vee \mathbf{1}\big) \wedge \neg A_0\Big)$

(iii) $\big((\neg A_4 \wedge A_7) \wedge (A_1 \vee A_1)\big)$

(iv) $\Big(\bigvee_{i=24}^{42} \Big(\bigvee_{j=37}^{73} \Big(\bigwedge_{k=3}^{4} A_{(i+j) \bmod k}\Big)\Big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die beiden Formeln

$$\begin{aligned} \varphi &:= \Big(\big(\neg A_3 \vee (A_2 \vee \neg A_1)\big) \wedge (\neg A_3 \vee A_0)\Big) \quad \text{und} \\ \psi &:= \Big(\neg A_3 \vee \big((\neg A_2 \to \neg A_1) \wedge A_0\big)\Big)\ . \end{aligned}$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.40 und 2.44 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe), welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**. Achten Sie darauf, dass in Satz 2.25 häufig die äußeren Klammern fehlen.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

(c) Finden Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\vee, \mathbf{1}\}$ und $\tau_2 := \{\neg, \to\}$ heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.34). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Satz 2.46 aus der Vorlesung.

(a) Bestimmen Sie alle Interpretationen, die φ_n erfüllen und bei denen die Interpretation nur eines Aussagensymbols abgeändert werden muss, damit φ_n nicht mehr erfüllt wird.

(b) Beweisen Sie Satz 2.46.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \cdots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil **(a)**, dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ mindestens zwei essentiell verschiedene Interpretationen aus **(a)** erfüllt. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über Moodle abzugeben! Vermerken Sie am Anfang der Datei in einem Prolog-Kommentar Namen und Matrikelnummern aller Studierenden, die an der Bearbeitung beteiligt waren. Beachten Sie, dass wir Ihre Bearbeitung dieser Aufgabe nur dann bewerten, wenn sich der abgegebene Prolog-Quellcode von SWI-Prolog ohne Fehlermeldungen laden lässt!*

Es ist endlich wieder Frühling geworden, und der Bienenschwarm aus Bienenstock 23 macht sich bereit zur Pollenernte. Auf der Suche nach wohlschmeckenden Pollen kommunizieren Bienen bekanntlich dadurch, dass sie kleine Tänze aufführen. Genauer betrachtet besteht ein solcher Tanz aus Flugbewegungen nach oben (`hoch`) bzw. unten (`runter`), und Saltos (`salto`). Am Ende jedes Tanzes fliegt die Biene einmal im Kreis (`kreis`).

Leider hat die Konzentrationsfähigkeit der Bienen durch den Einsatz verschiedener Pestizide sehr gelitten, so dass sie ihre Tänze nur noch unter Computerunterstützung korrekt ausführen können. Zu diesem Zweck repräsentiert der Zentralcomputer von Bienenstock 23 die Tänze der Bienen durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term

$$t \;:=\; \texttt{hoch(runter(salto(kreis)))}$$

den Tanz, bei dem die Biene zuerst ein Stück nach oben fliegt, dann wieder ein Stück nach unten, anschließend einen Salto ausführt, und den Tanz letztendlich mit dem obligatorischen Flug im Kreis beendet.

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `tanz/1`, so dass `tanz(X)` für einen beliebigen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Tanz repräsentiert. Beispielsweise sollte das Ziel `tanz(`t`)` erfüllt sein, jedoch nicht das Ziel `tanz(f(3,6))`.

(b) Von besonderer Wichtigkeit für den Schwarm ist es, zu erkennen, wenn sich eine Biene bedroht fühlt – beispielsweise wenn Hornissen in der Nähe sind. Dies ist daran zu erkennen, dass der Tanz der Biene folgende Eigenschaften hat:

(i) Jeder Salto wird direkt von einer Flugbewegung nach oben gefolgt.

(ii) Jede Flugbewegung nach unten wird direkt von einer Flugbewegung nach oben oder einem Salto gefolgt.

Schreiben Sie ein Prädikat `gefahr/1`, so dass `gefahr(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Tanz repräsentiert, der die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Beispielsweise sollte das Ziel

```
gefahr(salto(hoch(runter(hoch(kreis)))))
```

erfüllt sein, jedoch nicht das Ziel `gefahr(`t`)`.

(c) Zwei Bienen tanzen im Duett, wenn sie ihre Tänze *spiegelbildlich* ausführen – d.h., die Tänze der beiden Bienen haben die gleiche Länge, und jedesmal wenn die erste Biene nach oben fliegt, fliegt die zweite Biene nach unten, und umgekehrt. Insbesondere bedeutet dies, dass beide Bienen im selben Moment einen Salto ausführen und den Tanz mit einem Flug im Kreis beenden. Tanzen zwei Bienen im Duett, so heißt dies, dass sie sich über etwas einig sind, z.B. über eine besonders üppig bewachsene Blumenwiese oder ein Hornissennest.

Schreiben Sie ein Prädikat `duett/2`, so dass `duett(X, Y)` erfüllt ist, wenn `X` und `Y` Tänze repräsentieren, die im oben erklärten Sinn spiegelbildlich zueinander sind. Beispielsweise sollte das folgende Ziel erfüllt sein:

```
duett(hoch(salto(runter(kreis))), runter(salto(hoch(kreis))))
```