Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. Oktober 2016

Logik in der Informatik

Wintersemester 2016

Übungsblatt 2

Abgabe: *8. November 2016*

Aufgabe 1: **(28 Punkte)**

Es ist ein gut behütetes Geheimnis, dass Willy und Kate heimlich einen katzenliebenden und gefräßigen Außerirdischen beherbergen. Halloween ist seine einzige Chance das Haus zu verlassen, da er sich dann einen Reißverschluss ankleben und so tun kann, als wäre er ein Kind in einer skurrilen Verkleidung, das Süßigkeiten sammelt.

Es versteht sich von selbst, dass der Außerirdische bei dieser Gelegenheit eine möglichst große Ausbeute an Süßigkeiten und Katzen machen möchte. Um sein Vorhaben im Detail zu planen, teilt er seine Stadt zunächst in 30 mal 30 Parzellen ein. Alle Parzellen stellen Grundstücke dar, wobei ein Grundstück $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 30\}$ benachbart ist zu den Grundstücken $\langle i-1, j\rangle$, $\langle i+1, j\rangle$, $\langle i, j-1\rangle$ und $\langle i, j+1\rangle$. Grundstücke am Rande der Stadt haben natürlich weniger als vier Nachbarn.

Jedes Grundstück hat genau einen Bewohner. Jeder dieser Bewohner kann ein ***A****ngsthase*, eine *nette* ***O****ma*, ein ***G****eizhals* oder ein ***K****atzenliebhaber* sein. Er kann aber auch keiner dieser Kategorien angehören oder mehreren.

Für den Außerirdischen ist die Ausbeute bei netten Omas und Katzenliebhabern deutlich größer als bei den anderen Kategorien.

Um einen Plan über die erwartete Beute in den Grundstücken zu erstellen, benutzt der Außerirdische Aussagensymbole $A_{i,j}, O_{i,j}, G_{i,j}$ und $K_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \dots, 30\}$. Hierzu beschreibt $G_{7,11}$, dass der Bewohner von Grundstück $\langle 7, 11\rangle$ ein Geizhals ist. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

Um nun einen solchen Plan erstellen zu können, führt der Außerirdische eine Telefonumfrage durch.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass der Bewohner jedes Grundstücks zu genau einer der vier Kategorien gehört.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigvee_{i,j \in \{2,\dots,29\}} \left(K_{i,j} \wedge K_{i-1,j} \wedge K_{i+1,j} \wedge K_{i,j-1} \wedge K_{i,j+1}\right) .$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Bei der Telefonumfrage stellt der Außerirdische fest, dass Geizhälse aufgrund niedrigerer Grundstückspreise gerne am Stadtrand wohnen. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die repräsentiert, dass alle Geizhälse am Stadtrand leben.

(d) Der Außerirdische stellt darüber hinaus fest, dass Angsthasen, die nicht am Stadtrand wohnen, oftmals Angst vor Katzen haben und außerdem eine nette Oma in der Nähe haben wollen. Stellen Sie eine Formel φ_4 auf, die repräsentiert, dass Angsthasen, die nicht am Stadtrand wohnen, immer eine nette Oma in der Nachbarschaft haben, aber keinen Katzenliebhaber.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$$\varphi_1 := (A_0 \wedge \neg A_1) \qquad \varphi_3 := (A_0 \to A_1)$$
$$\varphi_2 := \neg\big((A_0 \wedge A_1) \to (A_0 \wedge A_2)\big) \qquad \varphi_4 := \big((A_0 \wedge \neg A_1) \to \mathbf{0}\big)$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Seien $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ endliche Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Gilt dann in jedem Fall, dass die Äquivalenz

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \quad \equiv \quad \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

erfüllt ist? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3: (27 Punkte)

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

- **(i)** A_{42}
- **(ii)** $(A_1 \wedge \neg(\mathbf{1} \vee \mathbf{0}))$
- **(iii)** $\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg\mathbf{0} \wedge A_5) \vee (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg\mathbf{1}) \wedge \neg A_4)))$

(b) Beweisen Sie, dass für jede Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$, in der keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn φ unerfüllbar ist, dann ist $\tilde{\varphi}$ allgemeingültig.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\to}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$[\![X \tilde{\to} Y]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![X \to Y]\!]^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 2 aus “Learn Prolog Now!”.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- **(i)** `donut` und `croissant`
- **(ii)** `tier(X)` und `tier(toto)`
- **(iii)** `Essen` und `'Essen'`
- **(iv)** `lecker` und `'lecker'`
- **(v)** `gut(pizza, Y)` und `gut(X, salami)`
- **(vi)** `f(a, X, Y)` und `f(X, Y, b)`
- **(vii)** `plus(sqr(a), X)` und `plus(sqr(Y), mult(b, Y))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4**(b)** von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- verfolgt(darth_vader, Y).
```