

Logik in der Informatik

Wintersemester 2016

Übungsblatt 1

Abgabe: bis 1. November 2016, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))

Bitte beachten Sie für die Abgabe Ihrer Lösung die Vorgaben auf unserer Webseite
<http://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS16-17/Logik/>.

Für dieses Übungsblatt und **alle** folgenden gilt: Eine Aufgabe gilt nur dann als vollständig bearbeitet, wenn neben der Lösung auch die notwendigen Begründungen angegeben sind – es sei denn, in der Aufgabenstellung steht explizit, dass eine solche Begründung nicht erforderlich ist.

Aufgabe 1:

(6 Punkte)

Welche der folgenden Wörter gehören **gemäß Definition 2.4** des Skripts zur Menge **AL**? Welche gehören nicht dazu? Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen.

- (i) A_{1028} (iii) $\neg(A_{42})$ (v) $(A_1 \wedge A_2)$ gdw. $(A_1 \vee A_2)$
(ii) $(1 \vee 0)$ (iv) $\neg\neg\neg\neg\neg A_5$ (vi) $((A_1 \rightarrow A_2) \vee (A_0 \leftarrow A_1))$

Aufgabe 2:

(35 Punkte)

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

- (i) $\varphi_1 := (A_1 \vee 1)$ (iii) $\varphi_3 := ((\mathbf{0} \rightarrow (\neg A_0 \vee \neg A_1)) \leftrightarrow \mathbf{0})$
(ii) $\varphi_2 := ((A_0 \wedge A_1) \rightarrow (A_0 \vee A_1))$ (iv) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^n (A_i \leftrightarrow A_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Seien φ_1, φ_2 und φ_3 wie in Aufgabenteil (a) definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (A_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ ((A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$.

Es ist also beispw. $\varphi_1 = ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)$, $\varphi_2 = ((A_2 \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_4 = ((A_4 \leftrightarrow A_5) \leftrightarrow A_6)$, $\varphi_5 = ((A_5 \leftrightarrow A_6) \leftrightarrow A_7)$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_7)$.

Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und erklären Sie, warum $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

Aufgabe 3:

(34 Punkte)

Es ist ein bisher gut gehütetes Geheimnis, dass Lummerland Teil der Euro-Zone ist. Aber ähnlich wie bei anderen Ländern auch haben die Turbulenzen an den Finanzmärkten den Staatshaushalt Lummerlands in arge Bedrängnis gebracht. Die Situation ist so ernst, dass Staatsoberhaupt König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte die Europäische Zentralbank EZB um einen Kredit bitten muss. Doch die EZB ist streng und vergibt den Kredit nur, wenn die folgenden Anforderungen erfüllt sind:

- I: Wenn die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden, müssen die Banken stärker kontrolliert werden.
 - II: Wenn Staatseigentum verkauft wird oder die Steuern gesenkt werden, dann dürfen die Ausgaben für Bildung nicht erhöht werden.
 - III: Die Banken werden genau dann stärker kontrolliert, wenn die Ausgaben für Bildung erhöht werden und die Steuern nicht gesenkt werden.
 - IV: Entweder müssen die Ausgaben für Bildung erhöht werden oder das Staatseigentum muss verkauft werden.
- (a) Geben Sie für jede der Anforderungen I-IV eine aussagenlogische Formel an, die die jeweilige Anforderung widerspiegelt. Benutzen Sie dafür die atomaren Aussagen B (die Ausgaben für Bildung werden erhöht), K (die Banken werden stärker kontrolliert), S (die Steuern werden gesenkt) und V (Staatseigentum wird verkauft).
 - (b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die die atomaren Aussagen B , K , S und V benutzt und die widerspiegelt, dass alle Anforderungen gleichzeitig erfüllt sein müssen.
 - (c) Stellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formel φ auf. Gehen Sie dabei so vor wie auf Seite 37 des Skripts. *Bitte beachten Sie, dass wir Ihre Lösung nur dann bewerten, wenn Sie die Aussagensymbole B , K , S und V in der Wahrheitstafel in alphabetischer Reihenfolge aufführen und wenn Sie die Vereinbarung auf Seite 32 des Skripts einhalten!*
 - (d) Geben Sie für Ihre Formel φ eine Interpretation \mathcal{I}_1 an, die besagt, dass die Steuern gesenkt werden, die Ausgaben für Bildung sich nicht erhöhen, Staatseigentum verkauft wird und die Banken stärker kontrolliert werden. Erfüllt diese Belegung die Formel φ ?
 - (e) Welche Maßnahmen genau muss König Alfons der Viertel-vor-Zwölfte aus den Möglichkeiten Steuersenkung, Bildungsausgabenerhöhung, Verkauf des Staatseigentums und Verstärkung der Bankenkontrolle treffen und welche muss er unterlassen, um allen Anforderungen der EZB gerecht zu werden? Geben Sie dazu eine erfüllende Interpretation \mathcal{I}_2 an, die Modell der Formel φ ist.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

- (a) Arbeiten Sie Kapitel 1 des Buchs „Learn Prolog Now!“ durch, dessen Online-Version Sie unter <http://www.learnprolognow.org> finden. Das heißt *nicht nur* lesen, sondern Sie sollten sich auch mit der Bedienung des Prolog-Systems vertraut machen. Unter <http://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS16-17/Logik/swi.html> finden Sie eine Kurzanleitung dazu. Sie sollten auf jeden Fall dazu in der Lage sein, z.B. die Beispiele aus dem Buch in Prolog auszuprobieren.
- (b) Gegeben sei folgendes Prologprogramm.

```
1   verwandt(luke, lea).
2   gute_seite(han).
3   mag(lea, han).
4   mag(luke, X) :- verwandt(luke, X).
5   mag(luke, X) :- gute_seite(X).
6   verfolgt(han, lea).
7   verfolgt(darth_vader, X) :- mag(luke, X).
```

Wie reagiert Prolog auf die folgenden Anfragen:

- (i) ?- gute_seite(luke). (iv) ?- mag(luke, Y).
(ii) ?- verwandt(luke, _). (v) ?- verfolgt(X, lea).
(iii) ?- mag(X, han). (vi) ?- verfolgt(darth_vader, Y).

- (c) Stellen Sie dem in (b) gegebenen Prologprogramm die Zeile

```
1   verwandt(luke, darth_vader).
```

voran. Wie reagiert Prolog nun auf die Anfrage ?- verfolgt(darth_vader, Y).?
Begründen Sie!