Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

24. November 2015

Logik in der Informatik

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 3. Dezember 2015, 13.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(24 Punkte)**

Der örtliche *Toobi-Baumarkt* hat einen neuen Automaten entwickelt um der Kundschaft Farben zu empfehlen. Dazu geben die Kunden eine oder zwei Farben aus einer Auswahl von sechs Farben in den Automaten ein und erhalten eine der sechs Farben als Ergebnis. Die sechs Farben ergeben das Universum $A := \{\text{Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange, Rot}\}$. Wenn der Automat nur eine Farbe als Eingabe bekommt, dann nimmt er Violett als zweite Eingabefarbe an. Besteht die Eingabe aus zweimal der gleichen Farbe, dann wird die komplementäre Farbe ausgegeben. Bei zwei komplementären Farben als Eingabe wird Violett ausgegeben, da man mit Violett nie etwas falsch machen kann. Ansonsten werden doppelte Grundfarbanteile gestrichen und aus den restlichen Grundfarbanteilen die Ausgabefarbe gemischt.

Sei $\sigma := \{f, c\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ mit $c^{\mathcal{A}} :=$ Violett. $\mathcal{A}$ soll die Funktionsweise des Farbempfehlungsautomaten beschreiben. Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Violett	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot
Violett	Gelb	Rot	Orange	Violett	Grün	Blau
Blau	Rot	Orange	Gelb	Grün	Violett	Violett
Grün	Orange	Gelb	Rot	Blau	Violett	Violett
Gelb	Violett	Grün	Blau	Violett	Rot	Orange
Orange	Grün	Violett	Violett	Rot	Blau	Gelb
Rot	Blau	Violett	Violett	Orange	Gelb	Grün

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Rot}, \quad \beta(v_1) = \text{Gelb}, \quad \beta(v_2) = \text{Blau}, \quad \text{und} \quad \beta(v_i) = \text{Orange} \quad \text{für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme, die Eingaben der Toobi-Kundschaft repräsentieren:

(a) $t_1 := f(v_{73}, c)$

(b) $t_2 := f(f(v_{42}, v_0), f(v_1, c))$

(c) $t_3 := f(f(f(v_2, v_5), f(v_3, c)), v_9)$

Geben Sie bei der Berechnung von $[\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ mindestens $i + 1$ Zwischenschritte an.

Aufgabe 2: **(26 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term, um eine atomare σ-Formel bzw. um eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel (gemäß der Definitionen aus dem Skript) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort keinen σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel darstellt.

(i) c

(ii) $f(c, f(v_2, v_0))$

(iii) $R(v_1 \vee v_2)$

(iv) $\forall v_{42}\, \exists v_{73} \Big(R(v_{42}, v_{73}) \ \wedge\ S(v_{21}, v_{42}, v_{73}) \Big)$

(v) $\exists v_7\ f\Big(f(f(f(v_7)))\Big) = f\Big(S(v_7, v_7, v_7)\Big)$

(vi) $\forall v_4\, \exists v_5\, \forall v_6 \bigg(f(v_3) = c \rightarrow \Big(S(f(v_1), v_4, v_5) \ \vee\ R(v_1, v_6) \Big) \bigg)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(q, q), (r, t), (t, r), (u, q)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(q, s, q), (u, t, r)\}$, $c^{\mathcal{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(1, 5), (2, 4), (4, 4), (5, 1)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(2, 5, 1), (4, 3, 4)\}$, $c^{\mathcal{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(v, x), (w, z), (x, x), (z, w)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(v, z, w), (x, v, x)\}$, $c^{\mathcal{C}} := y$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}} \colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

$a \in A$	q	r	s	t	u
$f^{\mathcal{A}}(a)$	t	s	t	u	q

$a \in B$	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{B}}(a)$	3	4	5	5	2

$a \in C$	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{C}}(a)$	x	y	z	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und beweisen Sie, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, beweisen Sie, dass es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{B, F, L, \mathit{Nachfolger}, \mathit{letzter}\}$ eine Signatur, wobei B, F, L 1-stellige Relationssymbole, *Nachfolger* ein 1-stelliges Funktionssymbol und *letzter* ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 34\}$ und $\mathit{letzter}^{\mathcal{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in B^{\mathcal{A}} \iff$ ALBA **B**ERLIN gewinnt am Spieltag a,
- $a \in F^{\mathcal{A}} \iff$ die Fraport Skyliners **F**rankfurt gewinnen am Spieltag a,
- $a \in L^{\mathcal{A}} \iff$ die MHP Riesen **L**udwigsburg gewinnen am Spieltag a, und
- $\mathit{Nachfolger}^{\mathcal{A}}(a) := \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \ldots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Die Fraport Skyliners Frankfurt gewinnen an mindestens einem Spieltag.

(ii) An jedem Spieltag gewinnt genau eine der drei Mannschaften.

(iii) Gewinnt ALBA BERLIN an einem Spieltag, dann gewinnt ALBA BERLIN auch an jedem folgenden Spieltag.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\forall x \Big(\neg \big(B(x) \lor x = \mathit{letzter} \big) \;\to\; B(\mathit{Nachfolger}(x)) \Big)$

(ii) $F(\mathit{letzter}) \;\lor\; \forall x \big(\neg \exists y\; x = \mathit{Nachfolger}(y) \;\to\; F(x) \big)$

(iii)
$$\begin{aligned}\forall x \Bigg(& \neg L(x) \\ & \land \Big(\neg \exists y\; x = \mathit{Nachfolger}(y) \;\to\; \big(B(x) \land \neg F(x) \big) \Big) \\ & \land \Big(\neg\, x = \mathit{letzter} \;\to\; \Big(\big(B(x) \leftrightarrow F(\mathit{Nachfolger}(x))\big) \\ & \qquad\qquad \land \big(F(x) \leftrightarrow B(\mathit{Nachfolger}(x))\big) \Big) \Big) \Bigg)\end{aligned}$$

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 6 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: *Die Bearbeitung der Teilaufgaben (b), (c) und (d) ist digital über das GOYA-System abzugeben!* ***Außerdem gilt:*** *Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, werden nicht bewertet!*

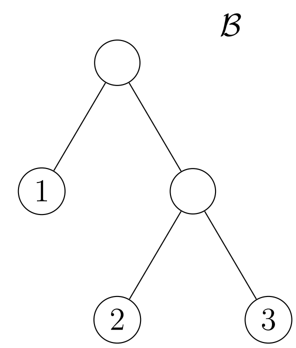
(a) Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- append([1, 2], [3], X).
```

(b) In dieser und den folgenden Teilaufgaben betrachten wir *Binärbäume*, deren *Blätter beschriftet* sind und deren innere Knoten immer *genau ein linkes und ein rechtes Kind* besitzen.

Wir repräsentieren solche Binärbäume wie folgt durch Prolog-Terme: Für einen beliebigen Prolog-Term `X` repräsentiert `leaf(X)` ein Blatt mit Beschriftung `X`. Sind `L` und `R` Repräsentationen von Binärbäumen, dann repräsentiert `node(L, R)` einen inneren Knoten, dessen Kinder die Wurzeln der durch `L` und `R` repräsentierten Binärbäume sind.

Beispielsweise wird der rechts abgebildete Binärbaum $\mathcal{B}$ repräsentiert durch den folgenden Prolog-Term:




```
node(leaf(1), node(leaf(2), leaf(3)))
```

Schreiben Sie ein Prädikat `tree/1`, so dass die Anfrage `?- tree(X).` für einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` einen Binärbaum repräsentiert.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `label/2`, so dass die Anfrage `?- label(B, X).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und einen Prolog-Term `X` genau dann erfüllt ist, wenn `X` die Beschriftung eines Blattes von `B` ist.

Repräsentiert `B` den in der obigen Zeichnung dargestellten Binärbaum $\mathcal{B}$, so soll beispielsweise die Anfrage

```
?- label(B, X).
```

die Antworten

```
X = 1;
X = 2;
X = 3.
```

liefern.

(d) Schreiben Sie ein Prädikat `labels/2`, so dass die Anfrage `?- labels(B, Y).` für eine Repräsentation `B` eines Binärbaums und eine Liste `Y` von Prolog-Termen genau dann erfüllt ist, wenn `Y` eine Auflistung der Beschriftungen aller Blätter von `B` ist; und zwar in der Reihenfolge vom am weitesten links zum am weitesten rechts stehenden Blatt.

Repräsentiert `B` den in der obigen Zeichnung dargestellten Binärbaum $\mathcal{B}$, so soll beispielsweise die Anfrage

```
?- labels(B, Y).
```

die Antwort

```
Y = [1, 2, 3].
```

liefern.

Hinweis: Benutzen Sie gegebenfalls das Prädikat `append/3`.