

Logik in der Informatik

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 5

Abgabe: bis 26. Nov. 2015, 13.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))

Aufgabe 1:

(33 Punkte)

- (a) Geben Sie eine Resolutionswiderlegung für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 := \{ \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg S\}, \{Q, S\}, \{\neg P, \neg Q, S\}, \{P, Q, \neg S\} \}$$

an, wobei P, Q, S unterschiedliche Aussagensymbole aus **AS** sind. Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

- (b) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.
- (c) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil (b), d.h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ : $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 2:

(27 Punkte)

- (a) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi := \neg P \wedge ((Q \wedge P) \rightarrow S) \wedge (\mathbf{1} \rightarrow Q) \wedge (R \vee \neg Q) \wedge ((W \wedge Q \wedge R) \rightarrow \mathbf{0}) \wedge (\mathbf{0} \rightarrow W)$$

- (b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma := \{ \{P\}, \{Q\}, \{\neg S, T\}, \{R\}, \{\neg Q, \neg S\}, \{\neg Q, \neg R, T\}, \{\neg T, \neg W, S\}, \{\neg Q, \neg P, W\} \}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklauseln mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

- (c) (i) Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathbf{AL}$ an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.
(ii) Gibt es eine Formel in **AL**, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist?

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

- (d) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge Γ_1 aus Aufgabe 1 (a) bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Weitere Aufgaben finden Sie auf der Rückseite

Aufgabe 3:

(15 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, c)\}$ über der Menge $A := \{a, b, c, d\}$. Welche Paare $(x, y) \in A \times A$ müssen zu R mindestens hinzugefügt werden, um aus R eine Relation zu erhalten, die jeweils

- (i) reflexiv ist? (iii) antisymmetrisch ist? (v) transitiv ist?
(ii) symmetrisch ist? (iv) konnex ist?

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i .

- (i) $M_1 := \{\circ, \mathcal{C}, \bullet, \mathcal{D}\}$, $R_1 := \{(\circ, \mathcal{C}), (\circ, \bullet), (\circ, \mathcal{D}), (\mathcal{C}, \bullet), (\mathcal{C}, \mathcal{D}), (\bullet, \mathcal{D})\}$
(ii) $M_2 := \mathbb{N}$, $R_2 := \{(a, b) \in M_2 \times M_2 : a + b \text{ ist eine gerade Zahl}\}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ an, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex, transitiv) die Relation R_i jeweils besitzt.

Aufgabe 4:

(25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.

Achtung: Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben ist digital über das GOYA-System abzugeben!
Außerdem gilt: Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, werden nicht bewertet!

(a) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben D, E, M, N, O, R, S, Y die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben S, E, N, D die Ziffern 0, 4, 2, 9 zu, so entspricht SEND der Dezimalzahl 429.

$$\begin{array}{r} \text{S E N D} \\ + \text{M O R E} \\ \hline = \text{M O N E Y} \end{array}$$

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \dots, 9\}$ zu den Buchstaben D, E, M, N, O, R, S, Y ist eine Lösung für das Rätsel, wenn die Gleichung $\text{SEND} + \text{MORE} = \text{MONEY}$ erfüllt ist.

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/8`, so dass `raetsel(D, E, M, N, O, R, S, Y)` genau dann erfüllt ist, wenn D, E, M, N, O, R, S, Y eine Lösung für das Rätsel ist.

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \dots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.

(b) Schreiben Sie ein *end-rekursives (tail recursive)* Prädikat `prod/2`, so dass gilt: Ist L eine Liste von Zahlen, dann wird bei der Anfrage `?- prod(L, P)` die Variable P mit dem Produkt der Zahlen in L unifiziert.

Beispielsweise soll die Anfrage `?- prod([1, 2, 3, 7], P)` die folgende Antwort liefern:

$$P = 42.$$

Hinweise: Führen Sie gegebenenfalls ein Hilfsprädikat `prod/3` ein. Achten Sie darauf, dass Ihr Prädikat `prod/2` auch bei Eingabe einer leeren Liste eine korrekte Antwort liefert.