Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

3. November 2015

Logik in der Informatik

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 3

Abgabe: *bis 12. Nov. 2015, 13.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Das *Winter Sneeze* Festival (Aufgabe 1 von Blatt 2) hat inzwischen intergalaktische Berühmtheit erlangt. Somit sollen zum nächsten Termin alle ***M****etler*, ***H****ippies*, ***R****ocker* und ***G****oths* des Universums eingeladen werden. Hierfür ist extra ein unendlich großer Zeltplatz mit Parzellen $\langle i, j\rangle$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ angemietet worden. Entsprechend existieren nun auch unendlich viele Aussagensymbole.

(a) Stellen Sie unendliche Formelmengen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 auf, die die in Aufgabe 1 (a), (b) und (c) von Blatt 2 beschriebenen Bedingungen repräsentieren, allerdings für den neuen Zeltplatz.

Wenn Sie die Formelmengen Φ_1 und Φ_3 auf Grundlage Ihrer erstellten Formeln φ_1 und φ_3 aus Aufgabe 1 von Blatt 2 bilden, dann geben Sie φ_1 und φ_3 bitte erneut an. Sollten Sie wissen oder befürchten, dass Ihre Formeln φ_1 und φ_3 fehlerhaft sind, dann verwenden Sie die Formeln φ_1 und φ_3, die wir am Abend des 5.11. auf unserer Webseite zur Verfügung stellen werden.

(b) Warum kann die Bedingung aus Aufgabe 1 (d) von Blatt 2 nicht durch eine unendliche Formelmenge repräsentiert werden?

(c) Da das Festival vom *intergalaktischen Verständigungsrat* unterstützt wird, und um eine leichte Erreichbarkeit der Trixie-Klos zu gewährleisten, soll auf jedem drei mal drei Parzellen großen Teilstück des Zeltplatzes jede Zuschauergruppierung vertreten sein und sich auch mindestens ein Trixie-Klo befinden. Stellen Sie eine unendliche Formelmenge Φ_4 auf, die diese Bedingung repräsentiert.

(d) Stellen Sie eine unendliche Formelmenge Φ auf, die alle Bedingungen aus Φ_1, Φ_2, Φ_3 und Φ_4 repräsentiert.

(e) Beweisen Sie mit Hilfe des Endlichkeitssatzes der Aussagenlogik, dass es zur Überprüfung, ob alle Bedingungen erfüllt sind, ausreicht, alle *endlichen* Teilstücke des Zeltplatzes zu kontrollieren.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, ob sie in DNF und/oder KNF und/oder NNF ist.

(i) $((A_{73} \vee \neg A_{42}) \vee A_{1337})$

(ii) $\Big(\big((\neg A_9 \vee A_1) \wedge \mathbf{0}\big) \vee \neg A_8\Big)$

(iii) $\big((A_0 \wedge \neg A_8) \vee (A_1 \vee A_5)\big)$

(iv) $\Big(\bigwedge_{i=2}^{4} \Big(\bigwedge_{j=5}^{73} \Big(\bigvee_{k=1}^{42} A_{i+j+k} \Big)\Big)\Big)$

(b) Betrachten Sie die beiden Formel

$$\varphi \;:=\; \Big(\big(\neg(A_0 \vee A_1) \vee A_2\big) \wedge \neg A_4\Big) \;\text{ und}$$
$$\psi \;:=\; \Big(A_3 \vee \big((\neg A_2 \to (\neg A_0 \vee A_1)) \wedge A_4\big)\Big)\,.$$

Wandeln Sie die Formel φ in eine äquivalente Formel φ_{DNF} in DNF und die Formel ψ in eine äquivalente Formel ψ_{KNF} in KNF um, und gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Formen Sie die Formeln wie in den Beispielen 2.40 und 2.44 um. Benutzen Sie keine Wahrheitstafeln.
- Benutzen Sie bei der Umformung ausschließlich die in Satz 2.25 angegebenen fundamentalen Äquivalenzen.
- Benutzen Sie pro Zwischenschritt immer nur *eine* Regel aus Satz 2.25. Erwähnen und markieren Sie (am besten in einer anderen Farbe) welche Regel Sie an welcher Stelle benutzt haben.
- In dieser Aufgabe dürfen Sie **keine Klammern** zur Vereinfachung **weglassen**. Achten Sie darauf, dass in Satz 2.25 häufig die äußeren Klammern fehlen.
- Beide Umformungen sind mit jeweils maximal drei Schritten möglich. Lösungen, die mehr Schritte beinhalten, können nicht die maximale Punktzahl erreichen und werden eventuell nicht vollständig korrigiert. Selbiges gilt auch bei Nichteinhaltung der anderen Punkte.

(c) Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 die Formel

$$\varphi \;:=\; \big(\neg(P \vee Q) \to (\neg P \wedge R)\big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung:

Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.54. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln ψ (beginnend mit ψ_1) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von φ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in φ wie in Beispiel 2.54 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei φ_n die in Satz 2.46 der Vorlesung betrachtete aussagenlogische Formel.

(a) Bestimmen Sie alle Interpretationen $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \to \{0,1\}$, für die gilt:

- $\mathcal{I}$ erfüllt φ_n und
- für jedes $i \in \{1,\dots,n\}$ existiert eine Interpretation, die *genau* eines der beiden Aussagensymbole X_i, Y_i auf einen anderen Wahrheitswert abbildet als $\mathcal{I}$, und die φ_n *nicht* erfüllt.

(b) Beweisen Sie Satz 2.46 der Vorlesung.

Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, ist einen Beweis durch Widerspruch zu führen. Nehmen Sie dafür an, dass ψ_n eine zu φ_n äquivalente Formel in DNF ist, die aus weniger als 2^n konjunktiven Klauseln besteht. D.h. es gibt eine natürliche Zahl $N < 2^n$ und N konjunktive Klauseln $\kappa_1,\dots,\kappa_N$, so dass $\psi_n = \kappa_1 \vee \dots \vee \kappa_N$. Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass mindestens eine der Klauseln $\kappa_1,\dots,\kappa_N$ mindestens zwei essentiell verschiedene Interpretationen $\mathcal{I}$ aus (a) erfüllt. Leiten Sie daraus einen Widerspruch her.

(c) Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ DNF-Formeln φ_n der Länge $\mathcal{O}(n)$, so dass jede zu φ_n äquivalente KNF-Formel mindestens 2^n disjunktive Klauseln hat? Beweisen Sie, dass Ihre Aussage korrekt ist.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 3 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist in einer Datei als Prolog-Quellcode digital über das GOYA-System abzugeben! Vermerken Sie am Anfang der Datei in einem Prolog-Kommentar Namen und Matrikelnummern aller Studierenden, die an der Bearbeitung beteiligt waren. Beachten Sie, dass wir Ihre Bearbeitung dieser Aufgabe nur dann bewerten, wenn sich der abgegebene Prolog-Quellcode von SWI-Prolog ohne Fehlermeldungen laden lässt!*

Richie R! Rost stellt den Studierenden seiner Dance-Academy den Tanz *Niveaulimbo* vor. Ein Niveaulimbo ist eine Folge der Moves *Crazy Crump* (`crazy_crump`) und *Hipster Hop* (`hipster_hop`). Zudem endet jeder Niveaulimbo in der Ruheposition *Booty Brake* (`booty_brake`). Wir repräsentieren einen Niveaulimbo durch geschachtelte Prolog-Terme. Beispielsweise repräsentiert der Prolog-Term t_1 := `crazy_crump(crazy_crump(hipster_hop(booty_brake)))` den Niveaulimbo, der mit zwei Crazy Crumps beginnt, gefolgt von einem Hipster Hop, und der schließlich in der Ruheposition Booty Brake endet.

(a) Schreiben Sie ein Prädikat `niveaulimbo/1`, so dass `niveaulimbo(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen Niveaulimbo repräsentiert. Beispielsweise sollte `niveaulimbo(`t_1`)` erfüllt sein.

(b) Ein *krasser Niveaulimbo* ist ein Niveaulimbo, der folgende zusätzliche Regeln erfüllt:

- Auf jeden Crazy Crump folgt direkt ein weiterer Crazy Crump oder ein Hipster Hop.
- Auf jeden Hipster Hop folgt direkt ein Crazy Crump oder der Booty Brake.

Schreiben Sie ein Prädikat `krass/1`, so dass `krass(X)` für einen Prolog-Term `X` genau dann gilt, wenn `X` einen krassen Niveaulimbo repräsentiert. Beispielsweise sollte `krass(`t_1`)` erfüllt sein, jedoch nicht `krass(hipster_hop(crazy_crump(booty_brake)))`.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat `duo/2`, so dass `duo(X, Y)` für zwei Prolog-Terme `X` und `Y` genau dann gilt, wenn `X` und `Y` Niveaulimbos mit der gleichen Anzahl von Moves repräsentieren und es gilt: Jedesmal wenn im Niveaulimbo `X` ein Crazy Crump ausgeführt wird, wird im Niveaulimbo `Y` ein Hipster Hop ausgeführt; und jedesmal wenn im Niveaulimbo `X` ein Hipster Hop ausgeführt wird, wird im Niveaulimbo `Y` ein Crazy Crump ausgeführt.