Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

27. Oktober 2015

Logik in der Informatik

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 5. November 2015, 13.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(24 Punkte)**

Der Veranstalter des *Winter Sneeze* Festivals hat als Übernachtungsmöglichkeit unter anderem einen 25 mal 25 Parzellen großen Zeltplatz zur Verfügung. Alle Parzellen sind quadratisch und gleich groß, wodurch die Parzelle $\langle i,j\rangle$ mit $i,j \in \{1,2,\ldots,25\}$ benachbart ist zu den Parzellen $\langle i-1,j\rangle$, $\langle i+1,j\rangle$, $\langle i,j-1\rangle$ und $\langle i,j+1\rangle$. Hierbei haben Parzellen am Rand des Zeltplatzes natürlich weniger als vier Nachbarn.

Es werden als Zuschauergruppierungen ***M****etler*, ***H****ippies*, ***R****ocker* und ***G****oths* erwartet. Außerdem werden einige Parzellen für ***T****rixie-Klos* benötigt. Auf jeder Parzelle kann immer nur exakt eine Zuschauergruppierung übernachten oder ein Klo stehen.

Um einen Belegungsplan für den Zeltplatz zu erstellen benutzt der Veranstalter die Aussagensymbole $M_{i,j}, H_{i,j}, R_{i,j}, G_{i,j}, T_{i,j}$ mit $i,j \in \{1,2,\ldots,25\}$. Hierbei beschreibt z. B. $R_{13,9}$ ob Parzelle $\langle 13,9\rangle$ von Rockern belegt wird. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

Nun soll der Zeltplatz maximal ausgelastet werden und es sollen dabei die Wünsche aller Festivalteilnehmer berücksichtigt werden. Hierbei sind Festivalteilnehmer, die auf einer Parzelle am Rand des Zeltplatzes übernachten, immer zufrieden egal wer oder was sich wo sonst auf dem Zeltplatz befindet, da man mit einem Randplatz besonders schnell zur Bühne gelangt.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass jede Parzelle des Zeltplatzes belegt ist und keine Doppelbelegung existiert.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j\in\{2,\ldots,24\}} \big((M_{i,j} \vee R_{i,j}) \rightarrow (\neg T_{i-1,j} \wedge \neg T_{i+1,j} \wedge \neg T_{i,j-1} \wedge \neg T_{i,j+1})\big)\ .$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Hippies sind, sofern sie keine Parzelle am Rand bekommen, nur zufrieden, wenn mindestens auf einer Nachbarparzelle ebenfalls Hippies übernachten und zusätzlich auf keiner Nachbarparzelle Metler wohnen. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die repräsentiert, dass alle Hippies zufrieden sind.

(d) Goths wollen sich mindestens einmal pro Nacht in großer Gruppe treffen, weswegen irgendwo auf dem Zeltplatz eine von Goths bewohnte Parzelle existieren muss, die von vier anderen Parzellen, die ebenfalls von Goths bewohnt werden, umgeben ist. Stellen Sie eine Formel φ_4 auf, die repräsentiert, dass mindestens eine solche Parzelle existiert.

Aufgabe 2: **(26 Punkte)**

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$$\varphi_1 := (\neg A_0 \vee \neg A_1) \qquad \varphi_3 := \big(A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)\big)$$
$$\varphi_2 := \big((A_0 \wedge A_1) \to \neg(A_0 \vee A_2)\big) \qquad \varphi_4 := \big(\neg(A_0 \to A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0)\big)$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Seien $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ endliche Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Gilt dann in jedem Fall, dass die Bedingung

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \quad \equiv \quad \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

erfüllt ist? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Finden Sie für jede der Mengen $\tau_1 := \{\vee, \wedge, \mathbf{0}\}$ und $\tau_2 := \{\neg, \to\}$ heraus, ob sie adäquat ist (siehe Definition 2.34). Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) A_{23}

(ii) $((\mathbf{1} \vee \mathbf{0}) \wedge \neg A_1)$

(iii) $\neg(\mathbf{1} \vee A_2) \wedge ((\neg \mathbf{0} \wedge A_5) \wedge (A_3 \wedge \neg((A_3 \wedge \neg \mathbf{1}) \wedge \neg A_4)))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn $\tilde{\varphi}$ nicht allgemeingültig ist, dann ist φ erfüllbar.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\to}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$[\![X \tilde{\to} Y]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![X \to Y]\!]^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 2 aus "Learn Prolog Now!".

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

(i) `burger` und `pizza`

(ii) `mit(toast, Y)` und `mit(X, nutella)`

(iii) `nett` und `'nett'`

(iv) `Quellcode` und `'Quellcode'`

(v) `toto` und `frosch(toto)`

(vi) `plus(X, Y, 3)` und `plus(2, X, Y)`

(vii) `or(not(X), Y)` und `or(not(p), and(X, X))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe **4(b)** von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage `?- trinkt(isabell, X).` !