

Logik in der Informatik

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 9

Abgabe: bis 14. Januar 2015, 9.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))

Aufgabe 1:

(31 Punkte)

Seien $\sigma := \{E, g, c\}$ und $\sigma' := \{E\}$ Signaturen. Hierbei ist E ein 2-stelliges Relationssymbol, g ein 1-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol.

- (a) Bestimmen Sie für jede der folgenden $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln φ , welche freie und welche gebundenen Vorkommen von Variablen in φ existieren und geben Sie die Menge $\text{frei}(\varphi)$ aller freien Variablen von φ an (ohne Begründung). Entscheiden Sie außerdem für jede der $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln, ob es sich um einen $\text{FO}[\sigma]$ -Satz handelt.

(i) $g(x) = g(c)$

(iv) $\exists z (E(x, z) \wedge E(z, y))$

(ii) $\exists x E(g(g(x)), x)$

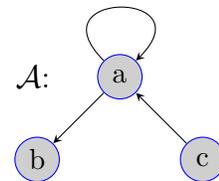
(v) $\forall x \forall y (\exists z g(z) = x \rightarrow \exists z g(z) = y)$

(iii) $(\exists y E(y, y) \vee \forall x \neg E(x, y))$

(vi) $(\forall z \exists x E(x, c) \wedge \forall y E(y, z))$

- (b) Betrachten Sie die σ' -Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$, die durch den Graphen in der nebenstehenden Abbildung repräsentiert wird. Geben Sie einen $\text{FO}[\sigma']$ -Satz φ an, der die Struktur eindeutig beschreibt. D.h. es soll für alle σ' -Strukturen \mathcal{B} gelten:

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \models \varphi$$



Erläutern Sie Ihren $\text{FO}[\sigma']$ -Satz φ .

- (c) Geben Sie für die $\text{FO}[\sigma']$ -Formel

$$\varphi(x) := \forall y \left(E(x, y) \rightarrow (\exists z (E(x, z) \wedge E(y, z))) \right)$$

eine σ' -Struktur \mathcal{A} , dessen Universum aus höchstens 4 Elementen besteht, und zwei Interpretationen $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}, \beta_1)$ und $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}, \beta_2)$ an, so dass $\mathcal{I}_1 \models \varphi$ und $\mathcal{I}_2 \models \neg \varphi$ gilt.

Aufgabe 2: (22 Punkte)

Sei $\Sigma := \{a, b\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leq, P_a, P_b\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über Σ . Ein FO[σ]-Satz φ beschreibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{W}_w \models \varphi$.

- (a) Welche Sprache beschreibt der folgende FO[σ]-Satz ψ ?

$$\psi := \forall x \left(P_a(x) \rightarrow \exists y \left(P_b(y) \wedge x \leq y \wedge \forall z \left((x \leq z \wedge z \leq y) \rightarrow (z = x \vee z = y) \right) \right) \right)$$

- (b) Geben Sie einen FO[σ]-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(ab)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie warum Ihr FO[σ]-Satz das Gewünschte leistet.

Aufgabe 3: (22 Punkte)

- (a) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Terme (Lemma 4.27) per Induktion über den Aufbau von Termen.
- (b) Beweisen Sie das Koinzidenzlemma für Formeln der Logik erster Stufe (Lemma 4.28) per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 11 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Hinweis: Geben Sie bitte Ihre Lösungen zu den folgenden Aufgaben schriftlich, d.h. nicht über GOYA, ab.

- (a) Starten Sie SWI-Prolog und geben Sie direkt danach die folgenden Anfragen (i)–(viii) nacheinander (d.h. ohne SWI-Prolog zwischendurch neu zu starten) ein.
- (i) `?- assert(f(a)).` (iv) `?- f(X).` (vii) `?- retractall(f(_)).`
(ii) `?- f(X).` (v) `?- retract(f(a)).` (viii) `?- f(X).`
(iii) `?- asserta(f(b)).` (vi) `?- f(X).`

Geben Sie die Antworten von Prolog auf jede der Anfragen (ii), (iv), (vi) und (viii) an.

- (b) Laden Sie das Prolog-Programm `bibel5.pl` von der Webseite der Vorlesung (<http://www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/WS14-15/Logik/downloads/bibel5.pl>) in SWI-Prolog. Geben Sie jeweils eine Anfrage an, welche
- (i) ... eine Liste aller Söhne von `terach` zurückgibt.
(ii) ... nacheinander für jeden Vater eine Liste seiner Söhne ausgibt.
(iii) ... eine Liste aller Elternteile *ohne Duplikate* ausgibt.