Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

17. Dezember 2014

Logik in der Informatik

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 8

Abgabe: *bis 7. Januar 2015, 9.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (21 Punkte)

Sei $\sigma := \{f, c\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $c^{\mathcal{A}} := \text{Spock}$. Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Stein},\ \beta(v_1) = \text{Spock},\ \beta(v_2) = \text{Schere},\ \text{ und } \beta(v_i) = \text{Papier} \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}$, $[\![t_3]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(a) $t_1 := f(c, v_1)$ **(b)** $t_2 := f(f(c, v_0), f(v_2, v_1))$ **(c)** $t_3 := f(c, f(f(v_6, v_7), f(v_2, c)))$

Aufgabe 2: (26 Punkte)

Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c.

(a) Überprüfen Sie für jedes der folgenden Wörter, ob es sich jeweils um einen σ-Term, um eine atomare σ-Formel bzw. um eine FO[σ]-Formel (gemäß der Definitionen aus dem Skript) handelt. Begründen Sie gegebenenfalls, warum ein Wort keinen σ-Term, keine atomare σ-Formel bzw. keine FO[σ]-Formel darstellt.

(i) $f(f(f(c)))$

(ii) $\big(f(v_1) \wedge R(v_1, v_2)\big)$

(iii) $S(f(c), v_3)$

(iv) $\big(\forall v_1 f(f(v_1)) \wedge S(f(v_2), v_1, c)\big)$

(v) $\exists v_2 \big(f(v_2) = f(f(v_2)) \vee \neg R(v_2, f(v_2))\big)$

(vi) $\forall v_4 \exists v_5 \forall v_6 \Big(\big(S(f(v_1), v_4, v_5) \wedge R(v_1, v_6)\big) \to f(v_3) = c\Big)$

(b) Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(q,q), (r,t), (t,r), (u,q)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(q,s,q), (u,t,r)\}$, $c^{\mathcal{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(5,5), (4,1), (2,5), (1,4)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(2,1,4), (5,3,5)\}$, $c^{\mathcal{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(w,y), (v,v), (y,w), (z,v)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(v,z,v), (z,y,w)\}$, $c^{\mathcal{C}} := x$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}}\colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}}\colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}}\colon C \to C$ definiert sind durch

$a \in A$	q	r	s	t	u
$f^{\mathcal{A}}(a)$	t	s	t	u	q

$a \in B$	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{B}}(a)$	2	5	1	3	1

$a \in C$	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{C}}(a)$	y	x	y	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und begründen Sie, warum es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, begründen Sie, warum es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 3: (28 Punkte)

Im Onlinerollenspiel *Village of Voidcraft* kann sich jeder Spieler einer Plündergilde anschließen; in der Rangliste der 100 besten Spieler wird dann zu jedem Spieler auch die entsprechende Gilde angezeigt. Für diese Aufgabe konzentrieren wir uns auf die drei Gilden *Punktegeier*, *Kistenklopper* und *RaidenStattStudieren*.

Sei $\sigma = \{P, K, R, Vorg, erster\}$ eine Signatur, wobei P, K, R 1-stellige Relationssymbole, $Vorg$ ein 1-stelliges Funktionssymbol und $erster$ ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ und $erster^{\mathcal{A}} = 1$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in P^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Punktegeier
- $a \in K^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde Kistenklopper
- $a \in R^{\mathcal{A}} \iff$ der Spieler auf Platz a der Rangliste ist in der Gilde RaidenStattStudieren
- $Vorg^{\mathcal{A}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = 1 \\ a-1, & \text{falls } a \in \{2, \ldots, 100\}. \end{cases}$

(a) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden FO[σ]-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\exists x \exists y \exists z \Big(\big(K(y) \wedge P(x) \big) \wedge R(z) \Big)$

(ii) $\exists x \big(P(x) \wedge \neg \exists y \; x = Vorg(y) \big)$

(iii) $\forall x \big((R(x) \wedge \neg \, erster = x) \rightarrow K(Vorg(x)) \big)$

(b) Geben Sie FO[σ]-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Auf Platz 1 der Rangliste ist ein Mitglied der Punktegeier.

(ii) Falls ein Spieler von Kistenklopper auf Platz 1 der Rangliste ist, dann stehen auf allen Plätzen Spieler von Kistenklopper.

(iii) Auf der Rangliste stehen mindestens zwei Mitglieder von RaidenStattStudieren.

(iv) Unmittelbar hinter jedem Mitglied von Kistenklopper steht eines von Punktegeier oder RaidenStattStudieren.

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 10 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe ist digital über das GOYA-System abzugeben!*
Außerdem gilt: *Lösungsansätze, die von SWI-Prolog nicht geladen werden können, oder die bei den in den Aufgabenstellungen aufgeführten Beispielanfragen nicht die richtige Antwort liefern, werden mit 0 Punkten bewertet!*

(a) Schreiben Sie ein Prolog-Prädikat `literal(Klausel, L)`, das die in einer disjunktiven Klausel `Klausel` enthaltenen Literale in `L` zurückliefert. Zum Beispiel sollte die Anfrage

```
?- literal((p \/ ~q) \/ (~q \/ r), L).
```

genau die Antworten `L = p`, `L = ~q` und `L = r` liefern. Die Reihenfolge der Antworten ist unwichtig. Zudem kann ein mehrfach in `Klausel` vorkommendes Literal auch mehrfach ausgegeben werden.

(b) Schreiben Sie ein Prolog-Prädikat `streiche(Klausel1, L, Klausel2)`, das *alle* Vorkommen eines Literals `L` aus einer disjunktiven Klausel `Klausel1` streicht und das Ergebnis in `Klausel2` zurückliefert. Insbesondere sollte in `Klausel2` die leere Klausel `0` zurückgeliefert werden, wenn in `Klausel1` abgesehen von `L` keine anderen Literale vorkommen. Zum Beispiel sollte die Anfrage

```
?- streiche((p \/ ~q) \/ (~q \/ r), ~q, Klausel2).
```

genau die Antwort `Klausel2 = p \/ r` liefern.