Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

29. Oktober 2014

Logik in der Informatik

Wintersemester 2014/2015

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 5. November 2014, 9.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, welche die Formel nicht erfüllt.

(i) $(V_2 \vee \mathbf{0})$

(ii) $\big((V_0 \wedge V_1) \rightarrow (V_0 \vee V_1)\big)$

(iii) $\big(V_0 \rightarrow (V_0 \rightarrow V_1)\big)$

(iv) $\neg\big((V_0 \wedge V_1) \rightarrow (V_0 \vee V_1)\big)$

(v) $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (V_i \leftrightarrow V_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Quadratzahl*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = m^2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n := \begin{cases} (V_n \leftrightarrow V_{n^2}), & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ (V_n \leftrightarrow \neg V_{n^2}), & \text{falls } n \text{ keine Quadratzahl ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Es ist also beispielsweise $\varphi_0 = (V_0 \leftrightarrow V_0)$, $\varphi_1 = (V_1 \leftrightarrow V_1)$, $\varphi_2 = (V_2 \leftrightarrow \neg V_4)$, $\varphi_3 = (V_3 \leftrightarrow \neg V_9)$, $\varphi_4 = (V_4 \leftrightarrow V_{16})$ und $\varphi_5 = (V_5 \leftrightarrow \neg V_{25})$.
Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$.

(c) Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel φ äquivalent zu unendlich vielen verschiedenen aussagenlogischen Formeln ist.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Alice besucht gerade die ruhige Kleinstadt *Hamster City*, als etwas Unerfreuliches geschieht: Aus dem nahe gelegenen Entwicklungslabor eines großen Konzerns entweicht ein Virus, das die meisten der Bewohner von Hamster City (und auch manche Tiere) in Zombies verwandelt.

Für Alice ist das kein sonderliches Problem, da sie über genug Waffen und Munition verfügt und außerdem reichlich Erfahrung mit solchen Situationen hat. Aus Erfahrung weiß sie, dass Zombies folgende Eigenschaften haben können: Manche Zombies sind schnell, einige können klettern, manche tragen einen Anzug, und manche waren früher keine normalen Mitbürger, sondern sind zombifizierte Hamster. (Prinzipiell können auch Zombiehamster einen Anzug tragen.) Nachdem sie einige Hundert Zombies unschädlich gemacht hat, fällt ihr auf, dass diese Eigenschaften bei dieser Zombiehorde wie folgt zusammenhängen:

(1) Wenn der Zombie nicht schnell ist, dann kann er nicht klettern.

(2) Wenn der Zombie keinen Anzug trägt, dann ist er nicht schnell.

(3) Kann der Zombie klettern und ist kein Zombiehamster, dann trägt er keinen Anzug.

(4) Trägt der Zombie einen Anzug, dann ist er kein Zombiehamster oder kann nicht klettern.

(a) Formalisieren Sie jede der Aussagen (1)–(4) durch aussagenlogische Formeln φ_1–φ_4. Verwenden Sie dazu die Variablen S, A, K und H, um die atomaren Aussagen „der Zombie ist schnell“, „der Zombie trägt einen Anzug“, „der Zombie kann klettern“ bzw. „der Zombie ist ein Zombiehamster“ auszudrücken.

Betrachten Sie nun die nachfolgenden Aussagen:

(5) Ist der Zombie ein Zombiehamster, dann trägt er keinen Anzug.

(6) Der Zombie kann nicht klettern.

(7) Der Zombie kann nicht klettern; und wenn er keinen Anzug trägt, dann ist er nicht schnell.

(8) Ist der Zombie kein Zombiehamster, dann trägt er einen Anzug oder ist nicht schnell.

(b) Geben Sie für jede der vier Aussagen eine aussagenlogische Formel an, die die Aussage repräsentiert.

(c) Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ die aussagenlogischen Formeln aus Teilaufgabe (a) und sei $\varphi := \bigwedge_{i=1}^{4} \varphi_i$. Entscheiden Sie für jede der vier aussagenlogischen Formeln aus (b), ob sie aus der Formel φ folgt und ob sie äquivalent dazu ist. Welche zum Überleben überaus nützlichen Informationen lassen sich aus diesen Beobachtungen ableiten?

Aufgabe 3: (25 Punkte)

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) V_{42} **(ii)** $((\mathbf{0} \wedge \mathbf{1}) \vee \neg V_1)$ **(iii)** $\neg(V_1 \wedge \mathbf{1}) \wedge ((\neg \mathbf{1} \wedge V_2) \wedge (V_3 \wedge \neg((V_3 \vee \neg \mathbf{1}) \wedge \neg V_1)))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln $\varphi \in \mathsf{AL}$, in denen keine Implikation vorkommt, gilt:

Wenn φ unerfüllbar ist, dann ist $\tilde{\varphi}$ allgemeingültig.

(c) Geben Sie die Wahrheitstafel für einen zur Implikation dualen Junktor an. D.h. definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\rightarrow}$, so dass für alle $X, Y \in \mathsf{AS}$ und alle Interpretationen $\mathcal{I}$ gilt:

$$[\![X \tilde{\rightarrow} Y]\!]^{\mathcal{I}} \quad = \quad 1 - [\![X \rightarrow Y]\!]^{\tilde{\mathcal{I}}}.$$

Können Sie nun den Dualitätssatz (Satz 2.28) auch für aussagenlogische Formeln mit Implikationen formulieren?

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 2 aus “Learn Prolog Now!”.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

(i) `butch` und `killer`

(ii) `gut(X, sahne)` und `gut(pizza, Y)`

(iii) `datei` und `'datei'`

(iv) `Datei` und `'Datei'`

(v) `lecker(brot)` und `brot`

(vi) `f(X, Y, a)` und `f(b, X, Y)`

(vii) `and(not(X), and(X, X))` und `and(not(p), Y)`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4(b) von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage `?- kills(marsellus, X).` !