

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2025

Übungsblatt 9

Abgabe: bis 7. Juli 2025, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Nutzen Sie zur Lösung dieser Aufgabe die Methode der logischen Reduktion (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.58).

Sei **3-COL** die Klasse aller gerichteten dreifärbbaren Graphen, d.h. aller $\{E/2\}$ -Strukturen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ für die gilt:

Es gibt eine Funktion $f : A \rightarrow \{\text{rot}, \text{gelb}, \text{blau}\}$, so dass für jede Kante (a, b) in $E^{\mathcal{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$.

Zeigen Sie: Die Klasse **3-COL** ist *nicht FO-definierbar*.

Aufgabe 2:

(20 Punkte)

Hunde äußern sich bekanntlich mit Hilfe der Laute „W“, „A“ und „U“.

Sei $\Sigma := \{W, A, U\}$ und sei die *Hundesprache* H definiert durch $H := \text{abl}_{\mathfrak{K}}$, wobei $\mathfrak{K}$ der folgende Kalkül über der Menge Σ^* ist:

$$\mathfrak{K} := \left\{ \frac{}{WA} \right\} \cup \left\{ \frac{v}{vv} : \text{für alle } v \in \Sigma^* \right\} \cup \left\{ \frac{vAw}{vAUw} : \text{für alle } v, w \in \Sigma^* \right\} \\ \cup \left\{ \frac{vUUw}{vAAAw} : \text{für alle } v, w \in \Sigma^* \right\} \cup \left\{ \frac{vAAAw}{vw} : \text{für alle } v, w \in \Sigma^* \right\}$$

- (a) Geben Sie für jedes der folgenden Worte aus Σ^* an, ob es zur Menge H gehört oder nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

(i) WA

(ii) UWAA

(iii) WAWAUU

(iv) WU

- (b) Zeigen Sie, dass für jedes Wort $w \in H$ gilt:

Die Anzahl $|w|_A$ der Vorkommen des Lauts A in w ist *nicht* durch 3 teilbar (d.h., es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $|w|_A = 3k + 1$ oder $|w|_A = 3k + 2$).

- (c) Kann ein Hund „WAAA“ machen? D.h., ist $WAAA \in H$?

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

Sei σ eine Signatur, sei $\Gamma \subseteq_e \text{FO}[\sigma]$ und seien $\varphi, \psi \in \text{FO}[\sigma]$.

(a) Zeigen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzen. Bei Angabe einer Ableitung im Sequenzenkalkül $\mathfrak{R}_S$ halten Sie sich bitte an das Format aus Beispiel 4.19 im Skript.

(i) $\varphi, (\neg\varphi \vee \psi) \vdash \psi$

(ii) $\neg\neg\varphi \vdash \varphi$

(b) Beweisen Sie die Korrektheit der Sequenzenregel $\exists$ -Einführung im Antezedens ($\exists A$):

$$\frac{\Gamma, \varphi_x^y \vdash \psi}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \psi} \quad \text{falls } y \notin \text{frei}(\Gamma, \exists x \varphi, \psi)$$

Aufgabe 4:**(30 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E\}$ die Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E . Wir interpretieren σ -Strukturen als gerichtete Graphen.

Wir sagen, ein Graph ist zyklisch, falls es ein $\ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und Knoten $a_1, \dots, a_\ell$ gibt, sodass (a_ℓ, a_1) und (a_i, a_{i+1}) für alle $i \in [\ell - 1]$ Kanten im Graphen bilden. Ein Graph ist azyklisch, falls er nicht zyklisch ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Klasse aller azyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen erststufig axiomatisierbar ist.

(b) Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Logik erster Stufe, um zu zeigen, dass die Klasse aller zyklischen (endlichen oder unendlichen) Graphen *nicht* erststufig axiomatisierbar ist.