

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2025

Übungsblatt 8

Abgabe: bis 30. Juni 2025, 10.00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1:

(19 Punkte)

Betrachten Sie die Kinodatenbank $\mathcal{D}$ aus der Vorlesung.

- (a) Geben Sie für die folgenden Anfragen jeweils eine $\text{FO}[\sigma_{\text{KINO}}]$ -Formel φ und ein Variablentupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ an, die die Anfrage beschreiben. Berechnen Sie jeweils auch die Relation $\llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket^{\mathcal{D}}$.
- (i) Geben Sie alle Kombinationen aus Name eines Kinos und Uhrzeit aus, die einer Vorstellung des Films Gravity entsprechen.
 - (ii) Geben Sie alle Paare von Namen von Kinos aus, die sich im gleichen Stadtteil befinden.
 - (iii) Geben Sie die Namen aller Kinos aus, in denen mindestens ein Film gezeigt wird, in dem exakt zwei verschiedene Regisseure Regie geführt haben.
- (b) Geben Sie umgangssprachlich an, welche Anfragen durch die Formeln φ_1 , φ_2 und φ_3 beschrieben werden.

(i) $\varphi_1 := \exists x_F R_{\text{Prog}}(\text{'Movimiento'}, x_F, x)$

(ii) $\varphi_2 := \exists x_{S_1} \exists x_T (R_{\text{Kino}}(x_1, x_2, x_{S_1}, x_T) \wedge \exists x_R \exists x_{S_2} R_{\text{Film}}(x_1, x_R, x_{S_2}))$

(iii) $\varphi_3 := \left(\exists x_K R_{\text{Prog}}(x_K, x_2, x_3) \wedge \right.$
 $\left. \exists x_{S_1} (R_{\text{Film}}(x_2, x_1, x_{S_1}) \wedge \forall x_F \forall x_{S_2} (R_{\text{Film}}(x_F, x_1, x_{S_2}) \rightarrow x_F = x_2)) \right)$

Aufgabe 2:

(25 Punkte)

Sei $\Sigma := \{\mathbf{A}, \mathbf{N}, \mathbf{S}\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leq, P_{\mathbf{A}}, P_{\mathbf{N}}, P_{\mathbf{S}}\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über dem Alphabet Σ .

- (a) **Definition:** Ein $\text{FO}[\sigma]$ -Satz φ beschreibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Welche Sprache beschreibt der folgende $\text{FO}[\sigma]$ -Satz ψ ?

$$\psi := \forall x \left(P_{\mathbf{S}}(x) \rightarrow \exists y \left(P_{\mathbf{A}}(y) \wedge y \leq x \wedge \forall z (z \leq y \vee x \leq z) \right) \right)$$

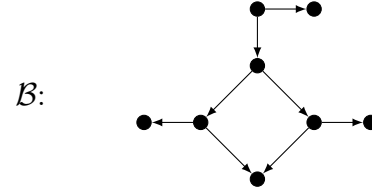
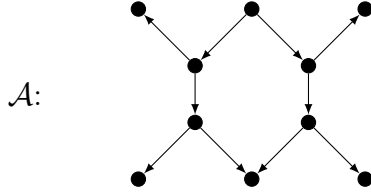
Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangssprachlich angeben.

- (b) Geben Sie einen $\text{FO}[\sigma]$ -Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(\mathbf{N S A}^*)^*$ definierte Sprache beschreibt und begründen Sie warum Ihr $\text{FO}[\sigma]$ -Satz das Gewünschte leistet.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3:**(25 Punkte)**

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Betrachten Sie die folgenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:



- (a) Welches ist das kleinste m , so dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ hat? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Gewinnstrategie für Spoiler im m -Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel und eine Gewinnstrategie für Duplicator im $(m-1)$ -Runden Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel beschreiben.
- (b) Finden Sie für Ihre Antwort m aus Teil (a) einen $\text{FO}[\sigma]$ -Satz ψ der Quantorentiefe m , so dass $\mathcal{A} \models \psi$ und $\mathcal{B} \models \neg\psi$.

Aufgabe 4:**(31 Punkte)**

- (a) Welche der beiden folgenden Aussagen ist für jede Signatur σ und jede $\text{FO}[\sigma]$ -Formel φ korrekt, welche nicht? Beweisen Sie, dass ihre Antworten korrekt sind.

(i) $\exists x \forall y \varphi \models \forall y \exists x \varphi$ (ii) $\forall y \exists x \varphi \models \exists x \forall y \varphi$

- (b) Sei die Signatur $\sigma := \{E, f\}$. Hierbei ist E ein 2-stelliges Relationssymbol und f ein 1-stelliges Funktionssymbol. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $\forall x \exists y E(x, y) \equiv \exists y \forall x E(x, y)$

(ii) $\forall x \forall y (f(x)=y \rightarrow f(y)=x) \equiv \forall y \forall x (\neg f(y)=x \rightarrow \neg f(x)=y)$

(iii) $\forall x \exists y f(x)=y \equiv \forall x \exists y ((x=y \vee E(x, y)) \rightarrow \exists z (z=y \vee E(z, y)))$

- (c) Welche der folgenden Aussagen sind für alle Signaturen σ und alle $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln φ und ψ korrekt, welche nicht? (Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.)

(i) $(\forall x \varphi \wedge \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \wedge \psi)$ (iii) $(\exists x \varphi \wedge \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \wedge \psi)$

(ii) $(\forall x \varphi \vee \forall x \psi) \equiv \forall x (\varphi \vee \psi)$ (iv) $(\exists x \varphi \vee \exists x \psi) \equiv \exists x (\varphi \vee \psi)$

- (d) Beweisen Sie, dass ihre Antworten zu (i) und (iii) in Aufgabenteil (c) korrekt sind.