Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. André Frochaux

16. Juni 2025

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2025

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 23. Juni 2025, 10.^{00} Uhr über Moodle*

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, g, i, k, l, o, r\}$.

(a) Geben Sie die Wortstruktur $\mathcal{A}_w$ für das Wort $w := korollar \in \Sigma^*$ an.

(b) Sei $\mathcal{B}$ die σ_Σ-Struktur mit dem Universum $B := [5]$, in der $\leqslant^\mathcal{B}$ die natürliche lineare Ordnung auf $[5]$ ist und $P_g^\mathcal{B} := \{3\}$, $P_i^\mathcal{B} := \{4\}$, $P_k^\mathcal{B} := \{5\}$, $P_l^\mathcal{B} := \{1\}$, $P_o^\mathcal{B} := \{2\}$ und $P_a^\mathcal{B} = P_r^\mathcal{B} = \emptyset$. Welches Wort $w \in \Sigma^*$ wird durch $\mathcal{B}$ repräsentiert?

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Der örtliche *Toobi-Baumarkt* hat einen neuen Automaten entwickelt, um der Kundschaft Farben zu empfehlen und über den Vorrat der Farben im Baumarkt zu informieren. Dazu geben die Kunden zwei Farben aus einer Auswahl von sechs Farben in den Automaten ein und erhalten eine der sechs Farben als Ergebnis. Die sechs Farben ergeben das Universum $A := \{\text{Violett, Blau, Grün, Gelb, Orange, Rot}\}$.

Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^\mathcal{A}, c^\mathcal{A}, R^\mathcal{A})$ mit $c^\mathcal{A} :=$ Violett und $R^\mathcal{A} = \{\text{Blau}\}$; die Funktion $f^\mathcal{A}$ soll die Funktionsweise des Farbempfehlungsautomaten beschreiben: Der Wert $f^\mathcal{A}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der folgenden Tabelle.

$f^\mathcal{A}$	Violett	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot
Violett	Gelb	Rot	Orange	Violett	Grün	Blau
Blau	Rot	Orange	Gelb	Grün	Violett	Violett
Grün	Orange	Gelb	Rot	Blau	Violett	Violett
Gelb	Violett	Grün	Blau	Violett	Rot	Orange
Orange	Grün	Violett	Violett	Rot	Blau	Gelb
Rot	Blau	Violett	Violett	Orange	Gelb	Grün

Dabei beschreibt $f^\mathcal{A}(x, y)$ die Farbempfehlung bei Eingabe der Farben x und y, und die Relation $R^\mathcal{A}$ beschreibt die vorrätigen Farben.

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Rot}, \quad \beta(v_1) = \text{Gelb}, \quad \beta(v_2) = \text{Blau}, \quad \text{und} \quad \beta(v_i) = \text{Orange} \quad \text{für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie $[\![t_1]\!]^\mathcal{I}$, $[\![t_2]\!]^\mathcal{I}$ und $[\![t_3]\!]^\mathcal{I}$ für die folgenden σ-Terme, die Eingaben der Toobi-Kundschaft repräsentieren:

(i) $t_1 := f(v_{73}, c)$ **(ii)** $t_2 := f(f(v_{42}, v_0), f(v_1, c))$ **(iii)** $t_3 := f(f(f(v_2, v_5), f(v_3, c)), v_9)$

Geben Sie bei der Berechnung von $[\![t_i]\!]^\mathcal{I}$ mit $i \in [3]$ mindestens $i + 1$ Zwischenschritte an.

Aufgabe 3: **(20 Punkte)**

Sei $\sigma := \{f, c\}$ die Signatur, die aus dem 2-stelligen Funktionssymbol f und dem Konstantensymbol c besteht und sei $\sigma' := \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

(a) Geben Sie an, ob es sich bei den folgenden Ausdrücken um $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln, σ-Terme, oder keines von beidem handelt.

(i) $\omega_1 := f(c, f(v_3, v_4))$

(ii) $\omega_2 := f^{\mathcal{A}}(c^{\mathcal{A}}, v_7)$

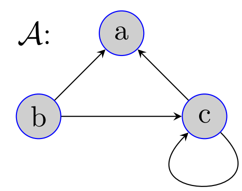
(iii) $\omega_3 := f(v_1, f(c, v_3)) = f(v_1, v_2)$

(iv) $\omega_4 := \exists v_1(v_1 = v_1)$

(v) $\omega_5 := (v_1 \wedge v_2)$

(vi) $\omega_6 := \exists v_2 \forall v_2 (f(c, c) = v_3 \rightarrow \forall v_2\ v_5 = v_6)$

(b) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma']$-Satz φ an, der die σ'-Struktur $\mathcal{A}$, die durch den (gerichteten) Graphen in der Abbildung rechts repräsentiert wird, bis auf Isomorphie genau beschreibt. Das heißt es soll für alle σ'-Strukturen $\mathcal{B}$ gelten:



$$\mathcal{B} \models \varphi \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

Aufgabe 4: **(30 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{E, g\}$ eine Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E und dem 1-stelligen Funktionssymbol g. Geben Sie für jeden der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze je eine σ-Struktur an, die den Satz erfüllt und eine, die den Satz nicht erfüllt. Die Universen der Strukturen, die Sie angeben, sollen jeweils maximal 3 Elemente besitzen.

(i) $\Big(\forall x\ \neg g(x){=}x\ \wedge\ \forall x \forall y \Big(E(x,y)\ \leftrightarrow\ g(x){=}y\Big)\Big)$

(ii) $\forall x \forall y \Big(\Big(\neg g(y){=}g(x)\ \leftrightarrow\ E(x,y)\Big)\ \vee\ \Big(E(x,y)\ \leftrightarrow\ \neg E(y,x)\Big)\Big)$

(b) Sei $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$. Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(i) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(ii) Es gibt unendlich viele Sophie Germain Primzahlen, d.h. Primzahlen p, so dass $2p + 1$ auch prim ist.