

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2025

Übungsblatt 5

Abgabe: bis 9. Juni 2025, 10.00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1:

(25 Punkte)

Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.52 aus dem Vorlesungsskript die Formel

$$\varphi := (((P \vee \neg Q) \wedge S) \rightarrow \neg(Q \vee \neg S))$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung: Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.52. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln von φ erhalten aufsteigend Bezeichner der Form ψ_i , wobei $i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (φ erhält keinen zusätzlichen Bezeichner).
- Negierte Aussagensymbole bilden hier keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Der Index i entspricht der Position der Subformeln in der Traversierung des Syntaxbaumes von φ nach der pre-order Tiefensuche. Eine solche Traversierung listet zunächst die Wurzel des Baumes auf, dann die Traversierung des kompletten linken Teilbaumes (so dieser existiert) und dann die des rechten Teilbaumes (so dieser existiert).
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \dots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ' .

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht oder nur teilweise korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 2:

(55 Punkte)

(a) Betrachten Sie die Klauselmengen

$$\Gamma_1 := \{ \{P, Q, R, \neg S\}, \{\neg P, \neg S\}, \{Q, \neg R\}, \{\neg Q, R, S\}, \{\neg Q, \neg S\}, \{S\} \}$$

$$\Gamma_2 := \{ \{Q, S\}, \{\neg Q, \neg S\}, \{S, \neg R\}, \{\neg S, R\}, \{\neg Q, \neg R\} \}$$

wobei P, Q, R, S paarweise verschiedene Aussagensymbole aus AS sind. Geben Sie je für Γ_1 und Γ_2 ein Modell oder eine Resolutionswiderlegung an. Gehen Sie analog zu Beispiel 2.58 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

- (b) Beweisen Sie per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt: $\Gamma \vdash_R \delta \implies \Gamma \models \delta$.
- (c) Gilt die Umkehrung der Aussage aus Aufgabenteil (b), d.h. gilt für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ : $\Gamma \models \delta \implies \Gamma \vdash_R \delta$? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3:

(20 Punkte)

Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus an, der bei Eingabe einer Formel $\varphi \in \text{AL}$, die in DNF ist, entscheidet, ob φ erfüllbar ist oder nicht.

Erläutern Sie, warum Ihr Algorithmus die korrekte Ausgabe liefert und weshalb Sie ihn dem Wahrheitstafelalgorithmus vorziehen würden. Je schlechter die Laufzeit Ihres Algorithmus im Vergleich zu dem besten uns bekannten Algorithmus ist, desto weniger Punkte bekommen Sie für Ihre Lösung.

Hinweis: Orientieren Sie sich für die Beschreibung Ihres Algorithmus' an der Notation des Wahrheitstafel- bzw. des Resolutionsalgorithmus auf Seite 92 des Skripts.