

Einführung in die formale Logik für IMP

Sommersemester 2025

Übungsblatt 4

Abgabe: bis 26. Mai 2025, 10.⁰⁰ Uhr über Moodle

Aufgabe 1:

(50 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir einen *Baum* $\mathcal{B}$ mit der *abzählbar unendlichen Knotenmenge* $V := \mathbb{N}$. Die Wurzel von $\mathcal{B}$ ist dabei der Knoten $w := 0$. Die Kanten von $\mathcal{B}$ repräsentieren wir durch eine Funktion *Kinder*, die jedem Knoten $v \in V$ die Menge $\text{Kinder}(v)$ all seiner Kinder zuordnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{B}$ *endlich verzweigend* ist. Damit meinen wir, dass für jeden Knoten $v \in V$ die Menge $\text{Kinder}(v)$ endlich ist.

- (a) Ein *Pfad* in $\mathcal{B}$ ist eine (endliche oder unendliche) Folge $(v_0, v_1, v_2, \dots)$ von Knoten aus V , so dass gilt: $v_0 = w$ ist die Wurzel von $\mathcal{B}$, und für alle v_i, v_{i+1} auf dem Pfad ist $v_{i+1} \in \text{Kinder}(v_i)$. Eine Interpretation $\mathcal{I}: \text{AS} \rightarrow \{0, 1\}$ repräsentiert einen Pfad $P = (v_0, v_1, v_2, \dots)$, falls für jedes $v \in V$ und das zugehörige Aussagensymbol $A_v \in \text{AS}$ gilt:

$$\mathcal{I}(A_v) = 1 \iff v \in \{v_0, v_1, v_2, \dots\}.$$

Das Aussagensymbol A_v repräsentiert also die Aussage „Der Knoten v gehört zum Pfad P “. Geben Sie eine unendliche Formelmengende Φ an, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

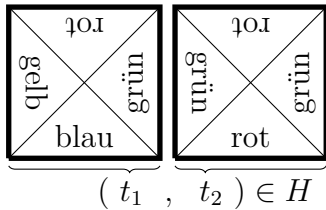
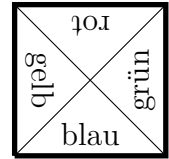
$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \text{ repräsentiert einen Pfad unendlicher Länge in } \mathcal{B}.$$

- (b) Ein endlicher Pfad $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_n)$ hat die Länge n . Wir sagen, dass der Baum $\mathcal{B}$ *Pfade beliebiger endlicher Länge* enthält, wenn $\mathcal{B}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pfad der Länge n enthält. Beweisen Sie mit Hilfe des *Endlichkeitssatzes* das folgende Lemma von Dénes König (1936):
Königs Lemma. *Wenn $\mathcal{B}$ Pfade beliebiger endlicher Länge enthält, dann enthält $\mathcal{B}$ einen Pfad unendlicher Länge.*

Aufgabe 2:

(50 Punkte)

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps t besitzen dieselbe Färbung ihrer Kanten. Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien H und V zwei Relationen auf K , die für zwei Kacheltypen t_1, t_2 besagen, dass t_1 und t_2 in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von derselben Farbe sind.



D.h. für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann, wenn t_2 rechts neben t_1 passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann, wenn t_2 über t_1 passt.

Eine (K, H, V) -Kachelung der $n \times n$ -Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \dots, n\}^2 \rightarrow K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$(k(i, j), k(i+1, j)) \in H \quad \text{und} \quad (k(j, i), k(j, i+1)) \in V.$$

Eine (K, H, V) -Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ -Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \rightarrow K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i, j), k(i+1, j)) \in H \quad \text{und} \quad (k(j, i), k(j, i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A_{i,j}^t$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld (i, j) mit einer Kachel vom Typ t gekachelt wird.

- (a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge Γ_n von aussagenlogischen Formeln, so dass gilt:

Jedes Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n entspricht einer (K, H, V) -Kachelung der $n \times n$ -Ebene und jede (K, H, V) -Kachelung der $n \times n$ -Ebene entspricht einem Modell $\mathcal{I}$ von Γ_n . Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge Γ_n .

- (b) Zeigen Sie das folgende Theorem:

Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen und seien H und V zwei 2-stellige Relationen auf K (d.h. $H, V \subseteq K \times K$). Wenn es für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ eine (K, H, V) -Kachelung der $n \times n$ -Ebene gibt, dann gibt es auch eine (K, H, V) -Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$ -Ebene.