Wir führen in diesem Paragraphen das Räuber und Gendarmen Spiel auf einem Graphen G ein.
Geben wir zunächst eine informelle Beschreibung: Sei $k \geq 1$ und G ein Graph.

> Es spielt ein Räuber gegen k Gendarmen, die alle auf dem Graphen G leben. Zu Beginn des Spiels wählen zunächst die Gendarmen k Ecken von G als ihre Anfangspositionen. Dann wählt der Räuber eine Ecke von G als seine Anfangsposition.
>
> Eine Runde des Spiels sieht wie folgt aus: Sagen wir, die Gendarmen stehen auf den Ecken $x_1, \dots, x_k$ und der Räuber auf der Ecke y. Dann besteigen einige der Gendarmen, sagen wir die auf $x_l, \dots, x_k$ stehenden, Hubschrauber (sie werden also zeitweilig vom Graphen entfernt) und fliegen zu neuen Ecken $x'_l, \dots, x'_k$. Noch bevor die Hubschrauber landen, sieht der Räuber, wo sie landen wollen und kann zu einer neuen Ecke y' laufen. Er läuft beliebig schnell, aber nur entlang eines Weges im Graphen G, der keine der Ecken $x_1, \dots, x_{l-1}$ enthält. Jetzt landen die Hubschrauber, die Gendarmen stehen also auf $x_1, \dots, x_{l-1}, x'_l, \dots, x'_k$ und der Räuber auf y'. Falls $y' \notin \{x_1, \dots, x_{l-1}, x'_l, \dots, x'_k\}$, wird eine weitere Runde gespielt.
>
> Die Gendarmen gewinnen das Spiel, wenn sie nach endlich vielen Runden den Räuber fangen, d.h. wenn eine Position mit Gendarmen auf $x_1, \dots, x_k$ und dem Räuber auf y erreicht wird, bei der $y \in \{x_1, \dots x_k\}$.

Hier ist eine formale Definition des Spiels:

(11.1) Definition. Sei $k \geq 1$ und G ein Graph. Das Spiel $\mathrm{RG}(G, k)$ wird von zwei Spielern R und GE gespielt. Eine Position des Spiels ist ein Paar (X, y), wobei $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(V^G)$ und $y \in V^G$.

Zu Beginn des Spiels wählt GE ein $X \in \mathcal{P}_{\leq k}(V^G)$. R antwortet, indem er ein $y \in V^G$ wählt.

In jeder Runde des Spiels, sagen wir in Position (X, y), wählt GE ein $X' \in \mathcal{P}_{\leq k}$. R antwortet, indem er ein $y' \in V^G$ wählt, für das es einen Weg von y nach y' gibt, der $X \cap X'$ nicht schneidet.

Das Spiel hört auf, wenn eine Position (X, y) mit $y \in X$ erreicht wird, in diesem Fall gewinnt GE. Tritt dieser Fall niemals ein, so gewinnt R.

Eine Partie des Spiels RG(G, k)ist eine Folge $(X_i, y_i)_{i \geq 1}$, so daß für alle $i \geq 1$ entweder ein Weg von y_i nach y_{i+1} in $G \setminus (X_i \cap X_{i+1})$ existiert oder $y_i \in X_i$ und $(X_i, y_i) = (X_{i+1}, y_{i+1})$ gilt. Tritt letzterer Fall für ein $i \geq 1$ ein, so sagen wir, daß GE die Partie gewinnt.
Eine Strategie für GE im Spiel RG(G, k) ist eine Abbildung $S : \{\emptyset\} \cup (\mathcal{P}_{\leq k}(V^G) \times V^G) \to \mathcal{P}_{\leq k}(V^G)$. Für eine Strategie S für GE ist eine S-Partie eine Partie $(X_i, y_i)_{i \geq 1}$ mit $X_0 = S(\emptyset)$ und $X_{i+1} = S(X_i, y_i)$ für alle $i \geq 1$. S ist eine Gewinnstrategie für GE, wenn GE jede S-Partie gewinnt.
Strategien und Gewinnstrategien für R lassen sich ähnlich definieren.

(11.2) Definition. Die Gendarmenweite eine Graphen G ist die Zahl

$$\text{gw}(G) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{GE hat eine Gewinnstrategie in RG}(G, k)\}.$$

(11.3) Proposition. (1) Für Wälder G gilt $\text{gw}(G) = 2$.

(2) Für alle $n \geq 1$ gilt $\text{gw}(C_n) = 3$.

(3) Für alle $n \geq 1$ gilt $\text{gw}(K_n) = n$.

(4) Für alle $n \geq m \geq 1$ gilt $\text{gw}(G_{m,n}) = m + 1$.

Beweis: Die einzige nichttriviale Aussage ist die untere Schranke in (3). Um diese zu beweisen, beschreiben wir eine Gewinnstrategie R für R in RG$(G_{m,n}, m)$.
Eine Zeile i, $1 \leq i \leq m$ von $G_{m,n}$ ist fast leer bezüglich einer Teilmenge $X \subseteq V := \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, wenn $X \cap \{i\} \times \{1, \ldots, n\} \subseteq \{(i, 1)\}$. Entsprechend definieren wir eine fast leere Spalte. Man beachte, daß es für alle $X \in \mathcal{P}_{\leq m}(V)$ eine fast leere Spalte oder eine fast leere Zeile gibt. Für $X \in \mathcal{P}_{\leq m-1}(V)$ gibt es sogar eine ganz leere Zeile und eine ganz leere Spalte.
R spielt so, daß immer folgende Invariante bewahrt bleibt:

Für jede Position (X, y), die in einer R-Partie auftreten kann, liegt y in einer bezgl. X fast leeren Zeile oder Spalte. $(*)$

Nehmen wir an, (X, y) erfüllt $(*)$. Sagen wir, y liegt in der fast leeren Spalte j. Sei $X' \in \mathcal{P}_{\leq m}(V) \setminus \{X\}$. Dann gibt es bezüglich $X \cap X'$ eine leere Zeile und eine leere Spalte, diese schneiden sowohl j als auch die fast leere Spalte bzw. Zeile, die es bezgl. X' gibt. Also gibt es in $G \setminus (X \cap X')$ einen Weg von y in diese fast leere Spalte bzw. Zeile. □

<u>(11.4) Lemma.</u> Für alle G gilt

$$\mathrm{gw}(G) \leq \mathrm{bw}(G) + 1.$$

<u>Beweis:</u> Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine kleine Baumzerlegung der Weite k von G.
Wir geben eine Gewinnstrategie S für GE im Spiel $\mathrm{RG}(G, k+1)$ an: Sei $r \in V^T$ beliebig. Wir setzen $S(\emptyset) = B_r$. Man beachte, daß es für alle $t \in T$ und $y \in V^G \setminus B_t$ die Knotenmenge $B^{-1}(y)$ ganz in einer Zusammenhangskomponente $Z(t, y)$ von $T \setminus t$ enthalten ist. Ferner gibt es genau ein $u(t, y) \in N^T(t) \cap Z(t, y)$. Für $t \in T$, $y \in V^G \setminus B_t$ setzen wir $S(B_t, y) := B_{u(t,y)}$ Für alle anderen $X \in \mathcal{P}_{\leq k+1}(V^G)$, $y \in V^G$ setzen wir $S(X, y) := X$.
Es läßt sich leicht induktiv zeigen, daß für jede S-Partie $(X_i, y_i)_{i \geq 1}$ gilt:

- Für alle $i \geq 1$ gibt es ein $t_i \in V^T$, so daß $X_i = B_{t_i}$.
- Für alle $i \geq 1$ gilt entweder $y_i \in X_i$ oder $Z(t_i, y_i) \supset Z(t_{i+1}, y_{i+1})$.

Daraus folgt sofort, daß S eine Gewinnstrategie ist. □

<u>§12. Brambel</u>

<u>(12.1) Definition.</u> Sei G ein Graph.

(1) Zwei Teilmengen $B, C \subseteq V^G$ berühren einander, wenn $B \cap C \neq \emptyset$ oder wenn $v \in B, w \in C$ existieren mit $vw \in E^G$.

(2) Ein Brambel von G ist eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(V^G)$ von zusammenhängenden Eckenmengen von G, die einander paarweise berühren.

(3) Eine Überdeckung eines Brambels $\mathcal{B}$ ist eine Teilmenge $X \subseteq V^G$ mit $B \cap X \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

(4) Die Weite eines Brambels $\mathcal{B}$ ist die Zahl

$$\mathtt{w}(\mathcal{B}) := \mathtt{min}\big\{|X| \;\big|\; X \text{ Überdeckung von } \mathcal{B}\big\}.$$

(5) Die Brambelweite von G ist die Zahl

$$\mathtt{brw}(G) := \mathtt{max}\big\{\mathtt{w}(\mathcal{B}) \;\big|\; \mathcal{B} \text{ Brambel von } G\big\}.$$

(12.2) Beispiel. Die folgenden Mengen bilden einen Brambel des Gitters $G_{n,n}$ der Weite $(n+1)$:

$$\begin{aligned}
&\big\{(1,j) \;\big|\; 1 \leq j \leq n\big\},\\
&\big\{(i,1) \;\big|\; 2 \leq i \leq n\big\},\\
&\big\{(k,j) \;\big|\; 2 \leq j \leq n\big\} \cup \big\{(i,l) \;\big|\; 2 \leq i \leq n\big\} \qquad \text{für } 2 \leq k,l \leq n.
\end{aligned}$$

(12.3) Bemerkung. Für alle Graphen G und $k \geq 1$ gilt:

$$K_k \preceq G \iff G \text{ besitzt einen Brambel } \mathcal{B} \text{ mit } |\mathcal{B}| = \mathtt{w}(\mathcal{B}) = k.$$

(12.4) Lemma. Für alle Graphen G gilt:

$$\mathtt{brw}(G) \leq \mathtt{gw}(G).$$

Beweis: Sei $\mathcal{B}$ ein Brambel von G der Ordnung $(k+1)$. Dann gewinnt der Räuber das Spiel $\mathtt{RG}(G,k)$, indem er sich immer in einem Element des Brambels aufhält. Also gilt $\mathtt{gw}(G) \geq (k+1)$. □

Nimmt man die Beweise der Lemmata (11.4) und (12.4) zusammen, so erhält man sofort:

(12.5) Korollar. Sei $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine Baumzerlegung eines Graphen G und $\mathcal{B}$ ein Brambel von G. Dann gibt es einen Knoten $t \in T$, so daß B_t den Brambel $\mathcal{B}$ überdeckt.

(12.6) Lemma. Seien $\mathcal{B}$ ein Brambel eines Graphen G und X, Y Überdeckungen von $\mathcal{B}$. Dann gibt eine Familie von $w(\mathcal{B})$ paarweise disjunkten Wegen von X nach Y.

Beweis: Folgt aus Lemma (0.2), denn jedes Z, das X von Y trennt, ist ebenfalls eine Überdeckung von $\mathcal{B}$. □

(12.7) Satz. Für alle Graphen G gilt:

$$\mathrm{bw}(G) + 1 = \mathrm{gw}(G) = \mathrm{brw}(G).$$

Beweis: Wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathrm{bw}(G) + 1 \leq \mathrm{brw}(G)$. Sei G ein Graph der Brambelweite $k + 1$. Wir zeigen, daß G eine Baumzerlegung der Weite höchstens k besitzt.
Eine Baumzerlegung $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ von G oder einem Teilgraphen von G nennen wir $\mathcal{B}$-gut, für einen Brambel $\mathcal{B}$, wenn kein Block B_t mit $|B_t| > (k + 1)$ den Brambel $\mathcal{B}$ überdeckt.
Wir zeigen:

Für jeden Brambel $\mathcal{B}$ von G gibt es eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung von G. (*)

Für $\mathcal{B} = \emptyset$ ergibt das die Behauptung.
Angenommen, (*) ist falsch. Sei $\mathcal{B}$ ein Brambel maximaler Größe, für den (*) nicht gilt. Sei X eine minimale Überdeckung von $\mathcal{B}$ und $l := |X| = w(\mathcal{B}) \leq k + 1$. Wir zeigen, daß für jede Komponente Y von $G \setminus X$ der Teilgraph $\langle X \cup Y \rangle^G$ eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung mit X als Block besitzt. Die Baumzerlegungen der einzelnen Komponenten lassen sich dann am Block X zu einer $\mathcal{B}$-guten Baumzerlegung von G zusammenkleben. Das widerspricht unserer Annahme, daß (*) für $\mathcal{B}$ nicht gilt.
Sei also Y eine Komponente von $G \setminus X$. Wir zeigen:

$\langle X \cup Y \rangle^G$ besitzt eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung, in der X als Block vorkommt. (**)

Falls Y ein $B \in \mathcal{B}$ nicht berührt, so ist $(W_2, (X, Y \cup N(Y)))$ eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung von $\langle X \cup Y \rangle^G$.
Nehmen wir also an, Y berührt alle $B \in \mathcal{B}$, dann ist $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{Y\}$ ein Brambel. Wegen der Minimalität von $\mathcal{B}$ erfüllt $\mathcal{B}'$ (*). Sei

$(T, (B_t)_{t \in V^T})$ eine $\mathcal{B}'$-gute Baumzerlegung von G. Diese Baumzerlegung ist nicht $\mathcal{B}$-gut, also gibt es ein $s \in T$, so daß $|B_s| > (k+1)$ und daß $|B_s|$ $\mathcal{B}$ überdeckt. Dann gilt $B_s \cap Y = \emptyset$. Nach Lemma (12.6) gibt es paarweise disjunkte Wege $W_1, \dots, W_l$ von X nach B_s. Für $1 \leq i \leq l$ sei x_i der Anfangspunkt von W_i. Dann gilt $X = \{x_1, \dots, x_k\}$. Weil $B_s \cap Y = \emptyset$ gilt $W_i \cap Y = \emptyset$ für $1 \leq i \leq l$. Für $1 \leq i \leq l$ wählen wir ein $t_i \in V^T$, so daß $x_i \in B_{t_i}$. Wir erinnern uns, daß sTt_i die Knotenmenge des Weges von s nach t_i in T bezeichnet.
Für $t \in V^T$ setzen wir

$$C_t := (B_t \cap (X \cup Y)) \cup \{x_i \mid t \in sTt_i\}$$

Ich behaupte, daß $(T, (C_t)_{t \in V^T})$ eine $\mathcal{B}$-gute Baumzerlegung von $\langle X \cup Y \rangle^G$ ist, die X als Block enthält. Das zeigt $(**)$. Zum Beweis der Behauptung stellen wir folgende Überlegungen an:

- $\bigcup_{t \in V^T} \langle B_t \rangle^G = G$ impliziert $\bigcup_{t \in V^T} \langle C_t \rangle^G = \langle X \cup Y \rangle^G$.

- Sei $v \in V^H$. Dann ist entweder $v \in Y$ und $C^{-1}(v) = B^{-1}(v)$ ist zusammenhängend, oder es gibt ein i, $1 \leq i \leq l$, so daß $v = x_i$. Dann gilt $C^{-1}(x_i) = B^{-1}(x_i) \cup sTt_i$. Diese Menge ist zusammenhängend, da $t_i \in B^{-1}(x_i)$.

- Da $B_s \cap Y = \emptyset$ gilt $B_s = X$.

- Für alle $t \in T$ gilt $|C_t| \leq |B_t|$. Denn falls $x_i \in C_t \setminus B_t$, so gilt $t \in sTt_i$. Da aber $B^{-1}(V^{W_i})$ zusammenhängend ist und s, t_i enthält, so gilt gibt es mindestens ein $w \in W_i \cap (B_t \setminus C_t)$.

- Sei nun $t \in V^T$ mit $|C_t| > (k+1)$. Dann gilt $C_t \cap Y \neq \emptyset$, da $|C_t| > |X|$. Da $(T, (B_t)_{t \in V^T})$ $\mathcal{B}'$-gut ist und $|B_t| \geq |C_t|$, existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap B_t = \emptyset$. Angenommen, $B \cap C_t \neq \emptyset$. Dann gibt es ein i mit $x_i \in B \cap C_t$. Es folgt $B \cap B_{t_i} \neq \emptyset$. Weil B_s den Brambel $\mathcal{B}$ überdeckt, gilt auch $B_s \cap B \neq \emptyset$. Da B und damit auch $B^{-1}(B)$ zusammenhängend sind, folgt $B \cap B_t \neq \emptyset$, ein Widerspruch.

$\square$

§13. Baumzerlegungen über Klassen von Graphen