Duplicators Antwort a_{i+1} in A wird analog zu Fall 1 ermittelt.

Damit sind wir fertig mit dem Induktionsschritt. Wir haben also bewiesen, dass Duplicator so spielen kann, dass nach jeder Runde $i \in \{0, .., m\}$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist. Insbesondere ist nach m Runden die Bedingung $(*)_m$ erfüllt und Duplicator hat daher die Partie gewonnen.

"$\Longrightarrow$": Offensichtlich genügt es, folgendes zu zeigen: Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.
Beweis: *Übung*. $\square$

3.1.3 Der Satz von Ehrenfeucht

Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass

$$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \iff \text{Duplicator gewinnt das } m\text{-Runden EF-Spiel auf } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B}.$$

Wegen Proposition 3.6 kann man also EF-Spiele verwenden, um zu zeigen, dass bestimmte Probleme nicht FO-definierbar sind.

3.12 Definition. Sei σ eine Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $k \in \mathbb{N}$, $\vec{a} = a_1, .., a_k$ eine Sequenz von Elementen aus $\mathfrak{A}$ und $\vec{x} = x_1, .., x_k$ eine Sequenz von k verschiedenen Variablen erster Stufe.
Wir definieren induktiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine FO-Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$ der Quantorentiefe m wie folgt:[3]

$$\varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) \;:=\; \bigwedge \left\{ \psi(\vec{x}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \psi \text{ ist atomare oder negierte atomare } \sigma\text{-Formel mit} \\ \textit{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, .., x_k\} \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \end{array} \right\}$$

und für $m > 0$

$$\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) \;:=\; \bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x_{k+1}) \;\wedge\; \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m-1}_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x_{k+1}).$$

Die Formel $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$ heißt m-*Isomorphietyp* (oder m-*Hintikka-Formel*) von $\vec{a}$ in $\mathfrak{A}$.

3.13 Bemerkungen.

(a) In der obigen Definition ist k=0 erlaubt. Der m-Isomorphietyp ist dann ein *Satz* $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$.

(b) Ist $\mathfrak{A}$ aus dem Kontext klar, so schreiben wir manchmal $\varphi^m_{\vec{a}}(\vec{x})$ an Stelle von $\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x})$.

(c) Für alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k \;:=\; \{\, \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}(\vec{x}) \;\mid\; \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \vec{a} \in A^k \,\}$$

endlich.
(Klar für m=0, da es nur endlich viele verschiedene *atomare* σ-Formeln über den Variablen $x_1, .., x_k$ gibt. Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.)

[3] Für eine endliche Menge M von Formeln schreiben wir $\bigwedge M$, um die Formel $\bigwedge_{\psi \in M} \psi$ zu bezeichnen.

(d) $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{a}]$.

3.14 Theorem (Satz von Ehrenfeucht, 1961). *Sei σ eine Signatur. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$ und $\vec{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\vec{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann sind äquivalent:*

(a) Duplicator gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$.

(b) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]$.

(c) $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_m (\mathfrak{B}, \vec{b})$,
d.h. für alle $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit frei$(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ und qr$(\psi) \leqslant m$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}]$.

Beweis: "(c) $\Longrightarrow$ (b)": Es gilt $qr(\varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}) = m$ und $\mathfrak{A} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{a}]$. Aus (c) folgt daher $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]$.

"(b) $\Longleftrightarrow$ (a)": Beweis per Induktion nach m.

$m=0$:

$$\begin{array}{cl} & \text{Duplicator gewinnt } \mathcal{G}_0(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b}) \\ \overset{\text{Gewinnbed.}}{\Longleftrightarrow} & \pi \ : \ \vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \ \mapsto \ \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma} \ \in \ \mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \\ \overset{\text{Wahl von } \varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}}{\Longleftrightarrow} & \mathfrak{B} \models \varphi^0_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]\,. \end{array}$$

$m \mapsto m{+}1$:

$$\begin{array}{cl} & \text{Duplicator gewinnt } \mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b}) \\ \Longleftrightarrow & \text{für alle } a \in A \text{ ex. } b \in B, \text{ so dass Duplicator } \mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}a, \mathfrak{B}, \vec{b}b) \text{ gewinnt, und} \\ & \text{für alle } b \in B \text{ ex. } a \in A, \text{ so dass Duplicator } \mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}a, \mathfrak{B}, \vec{b}b) \text{ gewinnt} \\ \overset{\text{Ind.ann.}}{\Longleftrightarrow} & \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } b \in B, \text{ so dass } \mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}[\vec{b}, b], \text{ und} \\ & \text{für alle } b \in B \text{ gibt es ein } a \in A, \text{ so dass } \mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}[\vec{b}, b]. \\ \Longleftrightarrow & \mathfrak{B} \ \models \ \Big(\bigwedge\limits_{a\in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x_{k+1}) \ \wedge \ \forall x_{k+1} \bigvee\limits_{a\in A} \varphi^m_{\mathfrak{A},\vec{a}a}(\vec{x}, x_{k+1}) \Big)[\vec{b}] \\ \overset{\text{Def. } \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}}{\Longleftrightarrow} & \mathfrak{B} \ \models \ \varphi^{m+1}_{\mathfrak{A},\vec{a}}[\vec{b}]. \end{array}$$

Somit sind wir fertig mit dem Beweis von "(b) $\Longleftrightarrow$ (a)".

"(a) $\Longrightarrow$ (c)": Per Induktion nach m.

$m=0$: Wie bei "(b) $\Longleftrightarrow$ (a)".

$m \mapsto m{+}1$: Gemäß Voraussetzung gewinnt Duplicator $\mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$. Sei $\psi(\vec{x})$ eine FO-Formel mit *frei*$(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ und *qr*$(\psi) \leqslant m{+}1$. Wir müssen zeigen, dass

$$(*) \qquad \mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}].$$

Klar: Die Menge aller Formeln ψ, die die Bedingung $(*)$ erfüllen, ist abgeschlossen unter Booleschen Kombinationen $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ und enthält gemäß Induktionsannahme alle Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.
Wir müssen daher nur noch den Fall betrachten, dass ψ von der Form

$$\psi \;=\; \exists x_{k+1}\, \chi(\vec{x}, x_{k+1})$$

ist.
Wir betrachten nur den Fall, dass $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$ und zeigen, dass dann auch $\mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}]$.
(Der andere Fall kann analog behandelt werden.)
Wegen $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$ gibt es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}, a]$. Da Duplicator $\mathcal{G}_{m+1}(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ gewinnt, muss es ein $b \in B$ geben, so dass Duplicator das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}a, \mathfrak{B}, \vec{b}b)$ gewinnt. Gemäß Induktionsannahme gilt dann $\mathfrak{A} \models \chi[\vec{a}, a] \iff \mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}, b]$. Es gilt also $\mathfrak{B} \models \chi[\vec{b}, b]$ und daher $\mathfrak{B} \models \exists x_{k+1}\chi\,[\vec{b}]$, d.h. $\mathfrak{B} \models \psi[\vec{b}]$. □

3.15 Bemerkung. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Strukturen, die sich durch einen FO-Satz φ der Quantorentiefe m unterscheiden lassen (also $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$), so gibt es gemäß Theorem 3.14 eine Gewinnstrategie für Spoiler im m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Der Satz φ gibt sogar direkt eine solche Gewinnstrategie an: Spoiler gewinnt das Spiel, indem er Elemente in $\mathfrak{A}$ wählt, die den $\exists$-Quantoren in φ entsprechen, und Elemente in $\mathfrak{B}$, die den $\forall$-Quantoren in φ entsprechen.
Sind beispielsweise $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Graphen aus Beispiel 3.10 (a), so ist

$$\varphi \;:=\; \exists x\, \forall y\, \big(x{=}y \vee E(x,y)\big)$$

ein Satz mit $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, d.h. es gilt

$$\mathfrak{A} \models \exists x\, \forall y\, \big(x{=}y \vee E(x,y)\big) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \models \forall x\, \exists y\, \big(x{\neq}y \wedge \neg E(x,y)\big)\,.$$

Spoiler wählt in Runde 1 ein $a_1 \in A$, so dass

$$\mathfrak{A} \models \Big(\forall y\, \big(x{=}y \vee E(x,y)\big)\Big)[a_1]$$

(ein solches Element gibt es, weil $\mathfrak{A} \models \varphi$).
Da $\mathfrak{B} \not\models \varphi$, muss für *jede* beliebige Antwort $b_1 \in B$ von Duplicator gelten:

$$\mathfrak{B} \models \Big(\exists y\, \big(x{\neq}y \wedge \neg E(x,y)\big)\Big)[b_1].$$

In der zweiten Runde kann Spoiler daher ein Element $b_2 \in B$ auswählen, für das gilt:

$$\mathfrak{B} \models \Big(x{\neq}y \wedge \neg E(x,y)\Big)[b_1, b_2].$$

Für jede mögliche Antwort $a_2 \in A$, die Duplicator geben kann, gilt

$$\mathfrak{A} \models \Big(x{=}y \vee E(x,y)\Big)[a_1, a_2].$$

Daher kann die Abbildung $a_1, a_2 \mapsto b_1, b_2$ kein partieller Isomorphismus sein, Duplicator hat die Partie also verloren.

3.16 Bemerkung. Aus Theorem 3.14 und Bemerkung 3.13 (c) folgt direkt, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jede Signatur σ die Relation $\equiv_m$ nur *endlich* viele Äquivalenzklassen auf der Klasse aller σ-Strukturen hat. σ-STRUKTUREN ist also eine Vereinigung von *endlich* vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_m$. Die Äquivalenzklasse, zu der eine gegebene Struktur $\mathfrak{A}$ gehört, wird dabei durch den Satz $\varphi^m_{\mathfrak{A}}$ definiert.

Die nächste Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht wird oft benutzt um zu zeigen, dass bestimmte Probleme *nicht* FO-definierbar sind.

3.17 Korollar. *Ist σ eine Signatur,* S *eine Klasse von σ-Strukturen und* $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{S}$*, so sind äquivalent:*

(a) C *ist nicht* FO-*definierbar in* S.

(b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$, so dass $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$.

(c) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S} \setminus \mathsf{C}$, so dass Duplicator das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ gewinnt.

Beweis: "(b) $\Longleftrightarrow$ (c)": Folgt direkt aus Theorem 3.14.

"(b) $\Longrightarrow$ (a)": Das ist gerade die Aussage von Proposition 3.6.

"(a) $\Longrightarrow$ (b)": Angenommen (b) gilt nicht. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass für alle Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathsf{S}$ gilt: Falls $\mathfrak{A} \in \mathsf{C}$ und $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, so $\mathfrak{B} \in \mathsf{C}$. Die Klasse C ist also eine Vereinigung von Äquivalenzklassen von $\equiv_m$ und wird daher durch den FO-Satz

$$\psi \;:=\; \bigvee \{ \varphi^m_{\mathfrak{A}} \;\mid\; \mathfrak{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur mit } \mathfrak{A} \in \mathsf{C} \;\}$$

definiert. Es gilt also: $\mathsf{C} = \mathrm{Mod}_{\mathsf{S}}(\psi)$. $\square$

Als Anwendung erhalten wir, dass die folgenden Probleme nicht FO-definierbar sind:

3.18 Korollar. *Für die Strukturklassen*

$\mathsf{S}_<$	:	*Klasse aller endlichen linearen Ordnungen*,
$\mathsf{Even}_<$	:	*Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Länge*,
UGraphs	:	*Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen,*
Conn	:	*Klasse aller endlichen ungerichteten zusammenhängenden Graphen*,
RGraphs	:	*Klasse aller endlichen Graphen $G = (V, E^G, S^G, T^G)$ mit $S^G, T^G \subseteq V$*,
Reach	:	*Klasse aller $G \in$* RGraphs*, in denen es einen Pfad von einem Knoten in S^G zu einem Knoten in T^G gibt*

gilt:

(a) $\mathsf{Even}_<$ *ist nicht* FO-*definierbar in* $\mathsf{S}_<$.

(b) Conn *ist nicht* FO-*definierbar in* UGraphs.

(c) Reach *ist nicht* FO-*definierbar in* RGraphs.

Beweis: (a): Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_m$ eine lineare Ordnung auf $2^m{+}2$ Elementen und $\mathfrak{B}_m$ eine lineare Ordnung auf $2^m{+}1$ Elementen. Somit ist $\mathfrak{A}_m \in \mathsf{Even}_<$ und $\mathfrak{B}_m \in \mathsf{S}_< \setminus \mathsf{Even}_<$. Von Satz 3.11 wissen wir, dass Duplicator das m-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ gewinnt. Gemäß Korollar 3.17 ist daher $\mathsf{Even}_<$ nicht FO-definierbar in $\mathsf{S}_<$.
(b): Folgt direkt aus (a) und Beispiel 2.78.
(c): Folgt genauso aus (a) und der Reduktion aus Beispiel 2.72 (a). □

3.1.4 Der Satz von Fraïssé

Die Charakterisierung der m-Äquivalenz $\equiv_m$ durch Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele ist eine gute Sichtweise, um Beweis*ideen zu finden*, indem man nach einer Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel sucht. Um Nichtausdrückbarkeits-Beweise *exakt aufschreiben* zu können, ist die im Folgenden vorgestellte Charakterisierung von Fraïssé sehr nützlich.

3.19 Definition (Gewinnpositionen $W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$).
Sei σ eine Signatur, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und $m \in \mathbb{N}$. Die Menge $W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ aller *Gewinnpositionen für Duplicator* besteht aus allen Abbildungen

$$p \ : \ \vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \ \mapsto \ \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma} \,,$$

für die $\vec{a} = a_1, .., a_k \in A$, $\vec{b} = b_1, .., b_k \in B$, $k \in \mathbb{N}$, so dass Duplicator das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ gewinnt.

3.20 Definition (m-Isomorphie). Sei σ eine Signatur und $m \in \mathbb{N}$. Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *m-isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$), falls es eine Folge $(I_j)_{j=0,..,m}$ mit den folgenden drei Eigenschaften gibt:

(1) Für jedes $j \in \{0, .., m\}$ ist $\varnothing \neq I_j \subseteq \mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ (d.h. I_j ist eine nicht-leere Menge partieller Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$).

(2) *"Hin-Eigenschaft":* Für jedes $j < m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $a \in A$ gibt es ein $q \in I_j$, so dass $q \supseteq p$ und $a \in \mathrm{def}(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung q von p, in deren Definitionsbereich a liegt).

(3) *"Her-Eigenschaft":* Für jedes $j < m$, jedes $p \in I_{j+1}$ und jedes $b \in B$ gibt es ein $q \in I_j$, so dass $q \supseteq p$ und $b \in \mathrm{bild}(q)$ (d.h. es gibt eine Erweiterung q von p, in deren Bildbereich b liegt).

Falls $(I_j)_{j\leqslant m}$ die Eigenschaften (1), (2) und (3) hat, so schreiben wir $(I_j)_{j\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und sagen "$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind m-isomorph vermöge $(I_j)_{j\leqslant m}$".

3.21 Theorem. *Sei σ eine Signatur. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, $k, m \in \mathbb{N}$ und $\vec{a} = a_1, .., a_k \in A$ und $\vec{b} = b_1, .., b_k \in B$. Dann sind äquivalent:*

(a) Duplicator gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$.

(b) $\left(\vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}\right) \in W_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $\big(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\big)_{j\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

(c) Es gibt $(I_j)_{j\leqslant m}$, so dass

$$\left(\vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}\right) \in I_m \quad \textit{und} \quad (I_j)_{j\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}\,.$$

Beweis: "(a) $\Longrightarrow$ (b)": Gilt gemäß der Definition der Gewinnpositionen $W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.
"(b) $\Longrightarrow$ (c)": Gilt mit $(I_j)_{j\leqslant m} := \big(W_j(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})\big)_{j\leqslant m}$.
"(c) $\Longrightarrow$ (a)": Gemäß Voraussetzung gibt es $(I_j)_{j\leqslant m}$, so dass $(I_j)_{j\leqslant m} : \mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$ und $\left(\vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}\right)$. Per Induktion nach i zeigen wir, dass Duplicator $(I_j)_{j\leqslant m}$ nutzen kann, um das Spiel $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ so zu spielen, dass für jedes $i \in \{0, .., m\}$ gilt:

$(*)_i$: Sind $a'_1, .., a'_i$ bzw. $b'_1, .., b'_i$ die in den Runden $1, .., i$ in A bzw. B gewählten Elemente, so gibt es einen partiellen Isomorphismus $p \in I_{m-i}$, so dass $a_1, .., a_k$, $a'_1, .., a'_i \in \text{def}(p)$ und

$$\begin{aligned} p(a_j) &= b_j \quad \text{für alle } j \in \{1, .., k\} \quad \text{und} \\ p(a'_j) &= b'_j \quad \text{für alle } j \in \{1, .., i\}. \end{aligned}$$

$i = 0$: $(*)_0$ gilt, da $\left(\vec{a}, (c^{\mathfrak{A}})_{c\in\sigma} \mapsto \vec{b}, (c^{\mathfrak{B}})_{c\in\sigma}\right)$.
$i \mapsto i{+}1$: Sei p der partielle Isomorphismus aus I_{m-i}, der laut Induktionsannahme existiert.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass Spoiler in Runde $i{+}1$ ein Element $a'_{i+1} \in A$ wählt. Gemäß der "Hin-Eigenschaft" gibt es eine Erweiterung $q \supseteq p$ in $I_{(m-i)-1}$, in deren Definitionsbereich a'_{i+1} liegt. Duplicator kann in Runde $i{+}1$ daher mit $b'_{i+1} := q(a'_{i+1})$ antworten und hat damit die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt.
In dem Fall, dass Spoiler in Runde $i{+}1$ ein Element $b'_{i+1} \in B$ wählt, kann Duplicator eine Erweiterung $q \supseteq p$ in $I_{(m-i)-1}$ finden, in deren Bildbereich b'_{i+1} liegt. Er kann daher mit einem a'_{i+1} antworten, für das $q(a'_{i+1}) = b'_{i+1}$ gilt, und hat damit $(*)_{i+1}$ erfüllt. □

Als direkte Folgerung aus Theorem 3.14 und Theorem 3.21 ergibt sich:

3.22 Korollar. *Sei $m \in \mathbb{N}$, σ eine Signatur und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Dann sind äquivalent:*

(a) Duplicator gewinnt $\mathcal{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(b) $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

(c) $\mathfrak{A} \cong_m \mathfrak{B}$.

(d) $\mathfrak{B} \models \varphi^m_{\mathfrak{A}}$.

Die Äquivalenz von (c) und (d) ist als *Satz von Fraïssé* (1954) bekannt.

3.23 Beispiel. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei G_ℓ ein ungerichteter Kreis der Länge $\ell{+}1$, d.h. G_ℓ hat Knotenmenge $\{0,\ldots,\ell\}$ und Kantenmenge

$$E^{G_\ell} \ := \ \{(i,i{+}1) \mid i<\ell\} \cup \{(\ell,0)\} \cup \{(i{+}1,i) \mid i<\ell\} \cup \{(0,\ell)\}\,.$$

Für $\ell,k \in \mathbb{N}$ sei $G_{\ell,k}$ die disjunkte Vereinigung von G_ℓ und G_k, d.h. $G_{\ell,k}$ besteht aus zwei ungerichteten Kreisen der Längen $\ell{+}1$ und $k{+}1$.
Wir zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{Sind } \ \ell,k \geqslant 2^m, \ \text{ so gilt } \ G_\ell \cong_m G_{\ell,k}, \ \text{ d.h.}$$

die Graphen G_ℓ und $G_{\ell,k}$ lassen sich nicht durch FO-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterscheiden lassen.

Beweis: Für einen ungerichteten Graphen G sei $\text{Dist}_G(\cdot,\cdot)$ die Distanzfunktion, also

$$\text{Dist}_G(u,v) \ := \ \begin{cases} 0\,, & \text{falls } u=v, \\ \infty\,, & \text{falls } u \neq v \text{ und es in } G \text{ keinen Pfad von } u \text{ nach } v \text{ gibt,} \\ \min\{d \mid \text{es gibt in } G \text{ einen Pfad der Länge } d \text{ von } u \text{ nach } v\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für jedes $j \in \{0,\ldots,m\}$ sei I_j die Menge aller partiellen Isomorphismen p von G_ℓ nach $G_{\ell,k}$, für die gilt:

- $|\text{def}(p)| \leqslant m{-}j$, und
- für alle $a,a' \in \text{def}(p)$ gilt:
  $\text{Dist}_{G_\ell}(a,a') = \text{Dist}_{G_{\ell,k}}(p(a),p(a'))$ oder $\text{Dist}_{G_\ell}(a,a'),\ \text{Dist}_{G_{\ell,k}}(p(a),p(a')) \geqslant 2^{j+1}$.

I_m besteht gerade aus der Abbildung "$\varnothing$", deren Definitionsbereich leer ist. Per Induktion kann man (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.11) nachweisen, dass I_j für jedes $j \in \{m,m{-}1,\ldots,0\}$ die Hin- und die Her-Eigenschaft hat und dass $I_j \neq \varnothing$.
Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$(I_j)_{j\leqslant m} \ : \ G_\ell \cong_m G_{\ell,k}\,.$$

$\square$

3.1.5 Der Satz von Hanf

3.24 Definition (Gaifman-Graph, Distanzfunktion, Nachbarschaft).
Sei σ eine relationale Signatur und $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur.

(a) Der *Gaifman-Graph* $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ ist der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})} := A$ und Kantenmenge

$$E^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})} \;:=\; \left\{ (u,v) \;\middle|\; \begin{array}{l} u \neq v \text{ und es gibt ein } R \in \sigma \text{ und ein Tupel } \vec{a} \in R^{\mathfrak{A}}, \text{ so} \\ \text{dass } u \text{ und } v \text{ als Komponenten in } \vec{a} \text{ vorkommen} \end{array} \right\}.$$

(b) Die *Distanzfunktion* $\mathrm{Dist}_{\mathfrak{A}}(\cdot,\cdot) : A \times A \to \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\mathrm{Dist}_{\mathfrak{A}}(u,v) \;:=\; \begin{cases} 0\,, & \text{falls } u = v, \\ \infty\,, & \text{falls } u \neq v \text{ und es in } \mathcal{G}(\mathfrak{A}) \text{ keinen Pfad von } u \text{ nach } v \text{ gibt}, \\ \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \text{es gibt in } \mathcal{G}(\mathfrak{A}) \text{ einen Pfad der Länge } \ell \text{ von } u \text{ nach } v\}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Für ein Element $a \in A$ und eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ ist die r*-Umgebung* (oder: r-Nachbarschaft) von a die Menge

$$N_{\mathfrak{A}}(r,a) \;:=\; \{b \in \mathfrak{A} \mid \mathrm{Dist}_{\mathfrak{A}}(a,b) \leqslant r\}.$$

Für ein $k \in \mathbb{N}$ und k Elemente $\vec{a} = a_1,\ldots,a_k$ aus A ist die r-Umgebung

$$N_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a}) \;:=\; N_{\mathfrak{A}}(r,a_1) \cup \cdots \cup N_{\mathfrak{A}}(r,a_k).$$

Wir schreiben $\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a})$ für die durch die Menge $N_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a})$ induzierte Substruktur von $\mathfrak{A}$, d.h.

$$\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a}) \;:=\; \mathfrak{A}_{|N_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a})} \;=\; \Big(N_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a}),\; \big(R^{\mathfrak{A}} \cap N_{\mathfrak{A}}(r,\vec{a})^{ar(R)}\big)_{R\in\sigma} \Big).$$

3.25 Bemerkung. Für zwei beliebige Elemente $b,b' \in N_{\mathfrak{A}}(r,a)$ ist $\mathrm{Dist}_{\mathfrak{A}}(b,b') \leqslant 2{\cdot}r$.

3.26 Definition (r-Umgebungstyp Typ$(r,a,\mathfrak{A})$).
Sei σ eine relationale Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $r \in \mathbb{N}$ und $a \in A$. Der r*-Umgebungstyp* Typ$(r,a,\mathfrak{A})$ *von* a *in* $\mathfrak{A}$ ist der *Isomorphietyp* der $(\sigma\dot{\cup}\{c\})$-Struktur $\big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r,a),a\big)$. D.h. Typ$\big(r,a,\mathfrak{A}\big)$ ist die Klasse aller $(\sigma\dot{\cup}\{c\})$-Strukturen $\mathfrak{C}$, die isomorph zur Struktur $\big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r,a),a\big)$ sind.

Insbesondere gilt für ein Element $b \in A$, dass a und b genau dann denselben r-Umgebungstyp in $\mathfrak{A}$ haben, wenn

$$\Big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r,a),a\Big) \;\cong\; \Big(\tilde{N}_{\mathfrak{A}}(r,b),b\Big).$$

3.27 Theorem (Satz von Hanf).
Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$. Falls gilt